Feuille de TD # 9

Transformée de Fourier

Cadre

1. Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.
2. « $\cdot$ » est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$: $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^n x_j\, \xi_j$, $\forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^n$.
3. « $|\ |$ » est la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$: $|x| := \left(\sum_{j=1}^n (x_j)^2\right)^{1/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 1.

a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\, f(x/\varepsilon)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (i) Montrer que $f_\varepsilon \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\, \xi)$.
   (iii) Montrer que $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (i) Montrer que $\tau_h f \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h \cdot \xi}\, \widehat{f}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (i) Montrer que $\overline{f} \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(-\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\check{f}(x) := f(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (i) Montrer que $\check{f} \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{\check{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 2.

a) Soit $a > 0$. Soit $g^a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^a(x) := e^{-a\, x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer $h^a := \widehat{g^a}$.
   Rappelons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \pi^{1/2}$.
   (i) Montrer que $g^a \in L^1$ et calculer $h^a(0)$.
   (ii) Montrer que $h^a \in C^1$ et donner la formule de $(h^a)'$.
   (iii) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(h^a)'(\xi) = -\dfrac{\xi\, h^a(\xi)}{2a}$. Indication : $x\, e^{-a\, x^2} = -1/(2a)\ \left(e^{-a\, x^2}\right)'$.
   (iv) Obtenir la formule $\widehat{e^{-a\, x^2}}(\xi) = (\pi/a)^{1/2}\, e^{-\xi^2/(4a)}$.
   Sous une forme plus compacte, nous avons $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{1/2}\, g^{1/(4a)}(\xi)$.

b) Plus généralement, soit $g^a(x) := e^{-a\, |x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{n/2}\, g^{1/(4a)}(\xi)$, $\forall\, a > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive. Soit $f(x) := e^{-(Ax)\cdot x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la question précédente et un changement linéaire de variables, calculer $\widehat{f}$.

Exercice # 3. Voici une autre méthode pour calculer la transformée de Fourier des gaussiennes. Elle est inspirée par l'analyse complexe (attendre le prochain semestre).

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F(s) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\imath s)^2}\, dx$.

a) Montrer que F est bien définie et de classe C^1.

b) Montrer que F est constante.

c) En déduire la formule de la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$.

Exercice # 4. Dans $\mathbb{R}$, soit $f := \chi_{[0,1]}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1$ mais que $\widehat{f} \notin \mathscr{L}^1$. En déduire que la formule d'inversion de Fourier ne s'applique pas à *toutes* les fonctions de $\mathscr{L}^1$.

Exercice # 5. Rappelons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$. (Il s'agit d'une intégrale généralisée.)

Soit f la question de l'exercice précédent.

a) Montrer que

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{\imath x\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

b) Voyez-vous un lien entre la formule ci-dessus et le fait que $f \in \mathscr{L}^2$?

Exercice # 6.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f}$.

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{g}$.

Exercice # 7. Soit $\lambda > 0$. Soit

$$f(x) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, (4\pi\, t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/(4t)}\, dt, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Calculer $\widehat{f}$.

Exercice # 8. (Résolution de l'équation de Helmholtz) Soit f la fonction de l'exercice précédent. Soit $g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer que $f * g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et que $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Soit Δ le *laplacien*, c'est-à-dire $\Delta u(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_1)^2}(x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_2)^2}(x) + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_n)^2}(x)$, $\forall\, u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Calculer $\mathscr{F}[(f * (\lambda g - \Delta g)]$.

c) Trouver une solution $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ de l'*équation de Helmholtz* $\lambda h - \Delta h = g$.

Exercice # 9. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := (\operatorname{sgn}\, x)\, e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) := \dfrac{1}{x+\imath}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 10.

a) Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction « radiale », c'est-à-dire de la forme $f(x) = g(|x|)$ pour une fonction Lebesgue mesurable $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est radiale.

b) Même propriété si $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 11.

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := \begin{cases} (1-t^2)^{-1/2}, & \text{si } |t| < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $g \in \mathscr{L}^1$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ en fonction de $\widehat{g}$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^2$. On pourra utiliser l'exercice précédent et calculer uniquement $\widehat{f}(t, 0)$, avec $t \geqslant 0$.

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-a|x|}$, où $a > 0$.

a) À partir de la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/(1+x^2)$ et de l'identité

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)\,t}\, dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$e^{-r} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}}\, e^{-r^2/(4t)}\, dt,\ \forall\, r > 0. \tag{1}$$

b) En utilisant (1) et la transformée de Fourier des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-ax^2}$, $a > 0$, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)\, \frac{a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$

avec $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ la fonction d'Euler.

Exercice # 13.

a) Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f * g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$. (On pourra commencer par $f \in L^1 \cap L^2$.)

b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$f * g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath\, x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi,\ \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

c) Montrer que (2) est vraie *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

d) De même si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 14. Rappelons le résultat suivant du cours. Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et si $f^{(j)} \in L^1$, $\forall\, j \in [\![0, k]\!]$, alors

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (\imath\xi)^\alpha\, \widehat{f}(\xi),\ \forall\, j \in [\![0, k]\!]. \tag{3}$$

Nous nous proposons ici de montrer que, pour $k \geqslant 2$, il y a trop d'hypothèses dans ce résultat, et qu'il suffit de supposer que $f \in L^1$ et $f^{(k)} \in L^1$.

Plus spécifiquement, nous allons montrer que

$$[f \in L^1(\mathbb{R}),\ f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})] \implies [f' \in L^1(\mathbb{R}), \ldots, f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R})].$$

Ceci fait echo à l'inégalité de Landau (exercice # 19 de la feuille # 7), qui donne

$$[f \in L^1(\mathbb{R}),\ f'' \in L^\infty(\mathbb{R})] \implies f' \in L^2(\mathbb{R}).$$

a) Prenons d'abord $k = 2$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$.

(i) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et f'' en utilisant la formule de Taylor à l'ordre deux sous forme intégrale au point x. En déduire une formule pour $f'(x)$.

(ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f''\|_{L^1})$.

(iii) En déduire que, pour $k = 2$, (3) peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^2$, $f, f'' \in L^1$.

b) Soit maintenant $k \geqslant 3$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$.

(i) Exprimer $f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+k-1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$ et $f^{(k)}$ en utilisant la formule de Taylor à l'ordre k sous forme intégrale au point x. En déduire des formules pour $f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$.

(ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} + \cdots + \|f^{(k-1)}\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f^{(k)}\|_{L^1})$.

(iii) En déduire que, pour tout $k \geqslant 2$, (3) peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^k$, $f, f^{(k)} \in L^1$.

Exercice # 15. (La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire détermine sa loi) Si μ est une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}^n$, nous définissons sa *transformée de Fourier* par la formule

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi}\, d\mu(x),\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que $\widehat{\mu}$ est bien définie, et que c'est une fonction continue et bornée.

Nous nous proposons d'établir l'analogue suivant de l'injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_k$ des mesures boréliennes finies dans $\mathbb{R}^n$, et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \widehat{\mu}_j = 0 \implies \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \mu_j = 0. \tag{4}$$

b) Soit μ une borélienne finie dans $\mathbb{R}^n$. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, et soit $f := \chi_{-K}$. Soit $g := f * \mu$ (voir l'exercice #29 de la feuille # 7).

Montrer que :

(i) g est continue et bornée.

(ii) $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\widehat{g} = \widehat{f}\,\widehat{\mu}$.

c) Soient $\mu_1, \ldots, \mu_k$ des mesures boréliennes finies dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \widehat{\mu}_j = 0$.

Montrer que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, g_j(0) = 0$.

d) En déduire que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \mu_j(K) = 0$.

e) En déduire que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \mu_j = 0$. Indication : séparer les j tels que $\alpha_j \geqslant 0$ des j tels que $\alpha_j < 0$.

f) Établir la conséquence suivante de (4) : si deux vecteurs aléatoires (avec le même nombre de coordonnées) ont la même fonction caractéristique, alors ils ont la même loi. (Voir l'exercice # 33 c) de la feuille # 3).