

Feuille de TD # 7  
Espaces  $L^p$ . Convolution

**Cadre**

Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré  $(X, \mathcal{F}, \mu)$ . Les espaces  $\mathcal{L}^p$  et  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , sont relatifs à cet espace mesuré.

**Exercice # 1.** (Inégalité de Young) Soient  $1 < p, q < \infty$  exposants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour  $b$  fixé, la fonction  $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$ .

**Exercice # 2.** Soient  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

- $\|tf\|_{L^p} = |t| \|f\|_{L^p}, \forall t \in \mathbb{R}$  (avec la convention  $0 \cdot \infty = 0$ ).
- Si  $f = g$  p. p., alors  $\|f - g\|_{L^p} = 0$  et  $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ .
- $\|f\|_{L^p} = 0$  si et seulement si  $f = 0$  p. p.
- La définition de  $\|f\|_{L^\infty}$  est correcte, au sens suivant. Soit  $A := \{M \in [0, \infty]; |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$ . Alors  $A$  est non vide et  $A$  a un plus petit élément,  $m$ . Cet  $m$  est le plus petit nombre  $C$  de  $[0, \infty]$  avec la propriété  $|f(x)| \leq C$  p. p.
- $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$  pour  $p = 1$  et  $p = \infty$ . (Ici,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ .)

**Exercice # 3.** Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ , muni de la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{B}_U$ . Si  $f \in C(U)$ , montrer que  $\|f\|_{L^\infty} = \sup_U |f|$ .

**Exercice # 4.** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Nous considérons des fonctions  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence  $f \sim g$  si et seulement si  $f = g$  p. p. a les propriétés suivantes.

- Si  $f \sim f_1$  et  $g \sim g_1$ , alors  $f + tg \sim f_1 + tg_1, \forall t \in \mathbb{R}$  (à condition que les fonctions soient finies en tout point).
- Si  $f \sim f_1$  et  $g \sim g_1$ , alors  $fg \sim f_1g_1$ .
- Si  $f \sim g$  et si  $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$ .
- Dans cette question,  $X := \mathbb{R}^n$  et  $\mu := \lambda_n$ .
  - Soit  $\tau_h f(x) := f(x - h), \forall x, h \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f \sim g$ , alors  $\tau_h f \sim \tau_h g, \forall h$ .
  - Soient  $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , avec  $f \sim f_1$  et  $g \sim g_1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $h \sim h_1$ , où

$$h(y) := f(x - y)g(y), h_1(y) := f_1(x - y)g_1(y), \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

**Exercice # 5.** Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

- Nous travaillons dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ . Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.
- Même propriété si à la place de  $\mathbb{R}^n$  nous considérons une partie borélienne de  $\mathbb{R}^n$ .

c) Généralisation?

**Exercice # 6.** Donner un sens aux expressions suivantes.

- a) «  $f \in L^p, f \geq 0$  ».
- b) «  $[f \in L^p, \|f\|_{L^p} = 0] \implies f = 0$  ».

**Exercice # 7.** Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

- a) Si  $f \in L^p$ , alors  $f$  est mesurable.
- b) Si  $f \in L^p$ , avec  $1 \leq p < \infty$ , alors  $f$  est finie p. p.
- c)  $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X; |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_{L^1}/t, \forall t > 0$ .  
Plus généralement, si  $1 \leq p < \infty$  et  $f \in L^p$ , alors

$$f \in L^p \implies \mu(\{x \in X; |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_{L^p}^p/t^p, \forall t > 0 \text{ (inégalité de Markov)}.$$

**Exercice # 8.** Nous munissons les parties boréliennes  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  de la mesure de Lebesgue  $\lambda_n$ . Décider pour quelles valeurs de  $p$  nous avons  $f \in L^p(U, \lambda_n)$  si :

- a)  $U := ]0, 1], f(x) := \frac{1}{x^a}, a \in \mathbb{R}$ .
- b)  $U := \mathbb{R}, f := \chi_{\mathbb{Q}}$ .
- c)  $U := ]0, \infty[, f(x) := \frac{\sin x}{x}$ .
- d)  $U := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq 1\}, f(x) := \frac{\sin |x|}{|x|^a}, a \in \mathbb{R}$  (avec «  $|\cdot|$  » la norme euclidienne standard).

**Exercice # 9.** Soit  $1 \leq p < \infty$ . Si  $f$  est mesurable, soit

$$F_f(t) := \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\}).$$

la fonction de répartition de  $f$ .

1. Si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, montrer la formule du gâteau en étages

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F_f(t) dt. \tag{1}$$

2. Montrer que (1) reste vraie sans l'hypothèse  $\mu$   $\sigma$ -finie. Indications : commencer par une fonction étagée, et traiter le cas général par convergence monotone.

**Exercice # 10.** (Espaces  $\ell^p$ )

- a) Si  $\mu$  est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement  $\mathcal{L}^p$  et  $L^p$ .

Si  $X = \mathbb{N}$  muni de la mesure de comptage sur  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^p = L^p, \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même  $\ell^p(A)$ , avec  $A$  a. p. d. (Cas particuliers importants :  $A = \mathbb{Z}, A = \mathbb{N}^*$ .)

- b) Si  $(a_n)_n$  est une suite indexée sur  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que

$$\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = \begin{cases} (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

- c) Montrer que, si  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , alors  $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$ . De plus, ces inclusions sont « continues » : si  $1 \leq p \leq r \leq \infty$ , alors  $\|(a_n)_n\|_{\ell^r} \leq \|(a_n)_n\|_{\ell^p}$ .

- d) Soit  $(a_n)_n \in \ell^p$ , avec  $p < \infty$ . Montrer que pour tout  $r > p$  nous avons  $\lim_{s \rightarrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$ .
- e) Si  $1 \leq r < \infty$  et  $(a_n)_n$  est une suite arbitraire, alors  $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$ .

**Exercice # 11.** (Espaces  $L^p$  quand la mesure est finie) Nous supposons  $\mu$  finie.

- a) Montrer que si  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ , alors  $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$ .  
Plus spécifiquement, montrer que,  $1 \leq p \leq r \leq \infty$ , alors  $\|f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p-1/r} \|f\|_{L^r}, \forall f$ .
- b) Soit  $f \in L^p$ , avec  $p > 1$ . Montrer que pour tout  $1 \leq r < p$  nous avons  $\lim_{s \rightarrow r} \|f\|_{L^s} = \|f\|_{L^r}$ .
- c) Si  $f \in L^\infty$ , alors :
- (i)  $f \in L^p, \forall 1 \leq p < \infty$ .
  - (ii) L'application  $[1, \infty] \ni p \mapsto \|f\|_{L^p}$  est continue. En particulier,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ .

**Exercice # 12.** Nous travaillons dans  $I = ]0, \infty[$  muni de la mesure de Lebesgue. Soient  $1 \leq p \leq \infty$  et

$$f \in L^p(I). \text{ Posons } F(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0.$$

- a) Donner un sens à cette définition. Montrer que  $F$  est bien définie.
- b) Si  $p = \infty$ , montrer que  $F$  est lipschitzienne.
- c) Si  $1 < p < \infty$ , montrer que  $F$  est « hölderienne » : il existe  $C < \infty$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  (que l'on déterminera) tels que  $|F(x) - F(y)| \leq C |x - y|^\alpha, \forall x, y \geq 0$ .
- d) Si  $p = 1$ , montrer que  $F$  est continue.
- e) Si  $p = 1$ , montrer que  $F$  est « absolument continue » : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$  sont tels que  $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) < \delta$ , alors  $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \dots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$ . Indication : lemme de Lebesgue.

**Exercice # 13.** (Lemme de Brezis-Lieb) Soit  $1 \leq p < \infty$ . Nous considérons une suite  $(f_j) \subset L^p$  telle que :

- i)  $\|f_j\|_{L^p} \leq C_0 < \infty, \forall j$ .
- ii)  $f_j \rightarrow f$ .

1. Montrer que  $f \in L^p$ .

2. A-t-on nécessairement  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^p$ ?

Dans la suite, on se propose de montrer le *lemme de Brezis-Lieb*

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

En fait, nous allons montrer la conclusion plus forte

$$\int ||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p| \rightarrow 0. \quad (3)$$

3. Expliquer pourquoi (3)  $\implies$  (2).

4. Si  $p = 1$ , montrer que

$$||f_n| - |f - f_n|| \leq |f|$$

et conclure via le théorème de convergence dominée.

5. Si  $1 < p < \infty$ , montrer que :

(a) Il existe  $C < \infty$  telle que

$$||t|^p - |t-1|^p - 1| \leq \begin{cases} C, & \text{si } |t| \leq 1 \\ C|t|^{p-1}, & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}.$$

(b) En déduire que

$$\left| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right| \leq \begin{cases} C|f|^p, & \text{si } |f_n| \leq |f| \\ C|f_n|^{p-1}|f|, & \text{si } |f_n| \geq |f| \end{cases}. \quad (4)$$

(c) Soit  $M \geq 1$ . On définit

$$A_{n,M} := \{x \in X ; |f_n(x)| \leq M|f(x)|\}, \quad B_{n,M} := \{x \in X ; |f_n(x)| > M|f(x)|\}.$$

En utilisant (4) et le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_{A_{n,M}} \left| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right| \rightarrow 0.$$

(d) Montrer que

$$\int_{B_{n,M}} |f|^p \leq \frac{C_0^p}{M^p}. \quad (5)$$

(e) Utiliser (5), la deuxième inégalité de (4) et l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \int_{B_{n,M}} \left| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right| = 0.$$

(f) Conclure.

**Exercice # 14.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p$  et  $f_n \rightarrow g$  p. p., quelle est la relation entre  $f$  et  $g$ ?

**Exercice # 15.**

a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.

Soient  $f \in L^p \setminus \{0\}$  et  $g \in L^q \setminus \{0\}$ , avec  $1 < p, q < \infty$  conjugués et  $f, g \geq 0$ . Alors

$$\int f g = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \iff [\exists C \in ]0, \infty[ \text{ tel que } f^p = C g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus  $f, g \geq 0$ , montrer que

$$\int f g = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \iff [\exists C \in ]0, \infty[ \text{ tel que } |f|^{p-1} f = C |g|^{q-1} g].$$

**Exercice # 16.**

a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.

Si  $1 < p < \infty$  et  $f, g \in L^p \setminus \{0\}$ , alors

$$\|f + g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \iff [\exists C \in ]0, \infty[ \text{ tel que } f = C g].$$

b) Que devient cette condition si  $p = 1$ ?

**Exercice # 17.** Soient  $1 \leq p_2, \dots, p_k \leq \infty$  tels que  $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$ . Alors

$$\|f_1 f_2 \dots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}, \quad \forall f_1, f_2, \dots, f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

**Exercice # 18.** Soient  $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ .

a) Montrer qu'il existe un unique  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ .

b) Montrer que  $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^\theta \|f\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}, \quad \forall f$ .

**Exercice # 19.** (Inégalités pour des opérateurs à noyau) Nous travaillons dans un espace produit  $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$ , avec  $\mu$  et  $\nu$   $\sigma$ -finies. Toutes les fonctions considérées sont *mesurables* et, par souci de simplicité, *positives*. Un *noyau* est une fonction  $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Soient  $1 < p, q < \infty$  deux exposants conjugués. Nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f, g) := \int_{X \times Y} K(x, y) f(x) g(y) d\mu \otimes \nu(x, y), \text{ avec } f : X \rightarrow \mathbb{R}_+, g : Y \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_Y K(x, y) f(x) d\mu(x) \right\|_p \text{ avec } f : X \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

a) Rappeler pourquoi

$$B(f) = \sup\{A(f, g) ; g \in \mathcal{L}^q(Y), \|g\|_q \leq 1\}.$$

b) Soient  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . En utilisant l'identité (évidente)

$$K(x, y) f(x) g(y) = \left( [K(x, y)]^{1/p} \frac{\alpha(x)}{\gamma(y)} f(x) \right) \times \left( [K(x, y)]^{1/q} \frac{\gamma(y)}{\alpha(x)} g(y) \right),$$

l'inégalité de Hölder et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$A(f, g) \leq \left( \int_X F(x) \alpha^p(x) f^p(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \times \left( \int_Y G(y) \gamma^q(y) g^q(y) d\nu(y) \right)^{1/q}, \quad (6)$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x, y)}{\gamma^p(y)} d\nu(y), \quad G(y) := \int_X \frac{K(x, y)}{\alpha^q(x)} d\mu(x).$$

c) (Inégalité de Schur) En prenant  $\alpha(x) \equiv 1, \gamma(y) \equiv 1$ , obtenir l'inégalité de Schur

$$B(f) \leq \left[ \sup_{x \in X} \int_Y K(x, y) d\nu(y) \right]^{1/p} \left[ \sup_{y \in Y} \int_X K(x, y) d\mu(x) \right]^{1-1/p} \|f\|_p.$$

d) (Inégalité de Young) En prenant  $\alpha(x) \equiv 1$  et  $\gamma(y) \equiv 1$ , obtenir, pour  $f, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , l'inégalité de Young  $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$ .

e) (Inégalité de Hardy) En prenant  $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$ , obtenir l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \left( \int_0^x f(y) dy \right)^p dx \leq q^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

f) (Inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz) *Préliminaire.* Nous admettons l'identité de la réflexion d'Euler

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)t^a} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad \forall 0 < a < 1. \quad (7)$$

En prenant  $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$ , montrer les inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz

$$\int_{]0, \infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y} dx \right|^p dy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p^p.$$

1. Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

**Exercice # 20.** (Inégalité de Hardy, encore) Nous proposons ici une autre approche pour montrer l'inégalité de Hardy obtenue dans l'item e) de l'exercice précédent. Nous travaillons dans  $I = ]0, \infty[$  muni de la mesure de Lebesgue. Soit  $1 < p < \infty$ . Si  $f \in L^p = L^p(I)$ , nous posons  $F(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x > 0$ .

a) Si  $f \in C_c^\infty(I)$ , montrer à l'aide d'une intégration par parties l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx. \tag{8}$$

b) Montrer que l'inégalité (8) reste vraie pour tout  $f \in L^p$ .

**Exercice # 21.** (Inégalité de Landau)

a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite  $(R_n)_n$  telle que :

(i)  $2n \leq R_n \leq 2n + 1, \forall n$ .

(ii)  $f(R_n) \rightarrow 0$ .

b) Si, de plus,  $f$  est dérivable, montrer qu'il existe une suite  $(S_n)_n$  telle que

(i)  $R_n < S_n < R_{n+1}, \forall n$  (et donc  $S_n \rightarrow \infty$ ).

(ii)  $f(S_n) f'(S_n) \rightarrow 0$ .

Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à  $f^2$ .

De même, il existe  $(T_n)_n$  telle que  $T_n \rightarrow -\infty$  et  $f(T_n) f'(T_n) \rightarrow 0$ .

c) (Inégalité de Landau) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable telle que  $f$  soit (Lebesgue) intégrable et  $f''$  soit bornée. Montrer que  $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$  et que

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On pourra commencer par calculer l'intégrale  $\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x) dx$  si, de plus,  $f \in C^2$ .

**Exercice # 22.**

a) Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Montrer que  $\{f \in L^p(X, \mathcal{T}, \mu); f \text{ étagée}\}$  est dense dans  $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ . Il convient de distinguer les cas  $1 \leq p < \infty$  et  $p = \infty$ .

b) On travaille dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ , avec  $\mu$  mesure de Radon. Si  $1 \leq p < \infty$ , montrer que

$$\left\{ \sum_{j=1}^k a_j \chi_{K_j}; k \in \mathbb{N}^*, a_j \in \mathbb{R}, K_j \text{ compact}, \forall j \right\}$$

est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ .

**Exercice # 23.**

a) Soit  $(X, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé. Soient  $f, g : X \rightarrow ]0, \infty[$  deux fonctions mesurables telles que  $f \cdot g \geq 1$ . Montrer que  $\int f dP \cdot \int g dP \geq 1$ . Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire l'inégalité de Hölder avec  $p = q = 2$ .

b) Si  $a_1, \dots, a_n > 0$ , alors  $\sum_{j=1}^n a_j \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \geq n^2$ .

**Exercice # 24.** Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  deux fonctions mesurables. Nous avons  $f * g(x) = g * f(x)$ , au sens du théorème du changement de variables.

**Exercice # 25.** Soit  $\rho$  un noyau régularisant standard. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons :

- a)  $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$  si  $|x| < \varepsilon$ .
- b)  $\rho_\varepsilon(x) = 0$  si  $|x| \geq \varepsilon$ .
- c)  $\int \rho_\varepsilon = 1$ .

**Exercice # 26.** Une approximation de l'identité est une famille  $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  telle que :

- i)  $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est (Lebesgue) intégrable,  $\forall \varepsilon > 0$ .
- ii)  $\int \zeta^\varepsilon = 1, \forall \varepsilon > 0$ .
- iii) Il existe une constante  $M < \infty$  telle que  $\int |\zeta^\varepsilon| \leq M, \forall \varepsilon > 0$ .
- iv) Pour tout  $\delta > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$ .

1. Montrer que, si  $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  (avec la mesure de Lebesgue) et  $\int \rho = 1$ , alors  $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$ , est une approximation de l'identité.

2. Soit  $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une approximation de l'identité.

- (a) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée et uniformément continue, montrer que  $f * \zeta^\varepsilon \rightarrow f$  uniformément sur  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Si  $1 \leq p < \infty$  et  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , montrer que  $f * \zeta^\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .
- (c) Si  $1 \leq p < \infty$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  (avec la mesure de Lebesgue), montrer que  $f * \zeta^\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice # 27.** Soient  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Alors :

- a)  $f * \varphi$  est défini en tout point.
- b)  $f * \varphi \in C^k$ .
- c) Pour toute dérivée partielle  $\partial^\alpha$  d'ordre  $\leq k, \partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$ .
- d) Si  $f$  est un polynôme (de  $n$  variables) de degré  $\leq m$ , alors  $f * \varphi$  est un polynôme de degré  $\leq m$ .

**Exercice # 28.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Soient  $1 \leq p_1, \dots, p_k < \infty$ . Soit  $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap \dots \cap L^{p_k}(\Omega)$ . Montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $\varphi_j \rightarrow f$  quand  $j \rightarrow \infty$  dans  $L^{p_i}(\Omega), i = 1, \dots, k$ .

**Exercice # 29.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $C_c^\infty(\Omega)$  ne sont pas denses dans  $L^\infty(\Omega)$ .

**Exercice # 30.** Nous travaillons dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$ . Soient  $p, q$  deux exposants conjugués. Si  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ , montrer que  $f * g$  est continue.

**Exercice # 31.** Nous travaillons dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$ . Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si  $A, B \in \mathcal{L}_n$  satisfont  $\lambda_n(A) > 0, \lambda_n(B) > 0$ , alors l'ensemble  $A + B$  contient une boule ouverte non vide.

- a) Montrer que l'on peut supposer  $A$  et  $B$  compacts.
- b) Montrer que  $f := \chi_A * \chi_B$  est continue.
- c) Calculer  $\int f$  et conclure.

**Exercice # 32.** (Résolution de l'équation de la chaleur dans le demi-espace) Nous travaillons dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ .  $|\cdot|$  désigne la longueur euclidienne standard dans  $\mathbb{R}^n$ . (Donc  $|x| = \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .) Soit

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$$

le noyau de la chaleur.

Soient  $1 \leq p \leq \infty$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{L}^p$ . Sous réserve d'existence, soit

$$u(x, t) := f * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_t(x - y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0.$$

1. Montrer que :

(a)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$ .

(b)  $u$  vérifie l'équation de la chaleur homogène

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[.$$

2. Si  $1 \leq p < \infty$ , montrer que «  $u(\cdot, 0) = f$  »<sup>2</sup>, au sens où

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } \mathcal{L}^p.$$

3. Si  $f$  est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

4. Si  $f$  est uniformément continue et bornée, montrer que

$$u(\cdot, t) \rightarrow f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

**Exercice # 33.** (Produit de convolution de deux mesures) Soient  $\mu, \nu$  deux mesures boréliennes  $\sigma$ -finies sur  $\mathbb{R}^n$ . À chaque ensemble borélien de  $\mathbb{R}^n$ , nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; x + y \in E\}.$$

a) Montrer que  $F$  est borélien.

b) Montrer que la formule  $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F)$ ,  $\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ , définit une mesure borélienne  $\xi$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures  $\mu$  et  $\nu$ , noté  $\mu * \nu$ .

c) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

d) Si les mesures boréliennes  $\mu, \nu, \eta$  sont finies, alors leur produit est associatif.

e) Montrer que  $\delta_0$  (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.

f) Si  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures à densités  $f$ , respectivement  $g$ , par rapport à  $\nu_n$ , montrer que  $\mu * \nu$  a la densité  $f * g$ .

g) Si  $\mu$  est à densité  $f$  par rapport à  $\nu_n$ , alors  $\mu * \nu$  a la densité  $f * \nu$ , où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\nu(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Exercice # 34.** (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction borélienne, et  $\mu$  est une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ , nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\nu(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

2. Noter que  $u$  n'est pas définie pour  $t = 0$ .

- a) Si  $f$  est Lebesgue intégrable et  $\mu$  est finie, alors  $f * \mu$  est définie  $\nu_n$ -p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.
- b) Si  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  et  $\mu$  est une mesure de Radon, alors  $f * \mu$  est définie en tout point, et est une fonction de classe  $C^k$ .

**Exercice # 35.** (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}, g(x + y) = g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Un résultat très connu affirme que, si  $f$  est une solution *continue* de (10), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement)}. \quad (12)$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si  $g$  est une solution *continue* de (11), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{iAx}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement)}. \quad (13)$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur  $f$  et  $g$ , mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (12) et (13) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que  $f$  (ou  $g$ ) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \text{ alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y) \psi(y) dy \neq 0. \quad (14)$$

- a) Soit  $g$  solution Lebesgue mesurable de (11). En multipliant (11) par  $\psi(y)$ , avec  $\psi$  comme dans (14) (avec  $n = 1$ ), et en intégrant dans la variable  $y$ , montrer que  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

- b) Soit  $f$  une solution Lebesgue mesurable de (10). Soit  $g := e^{if}$ . En utilisant la question précédente pour  $g$ , montrer qu'il existe  $A \in \mathbb{R}$  et une fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi h(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- c) (i) Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction telle que

$$h(x + y) = h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).

Montrer que  $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Conclusion?

- d) Montrons (14). Soit  $A := \{y \in \mathbb{R}; g(y) \neq 0\}$ .

(i) Expliquer pourquoi  $\lambda_1(A) > 0$ .

(ii) Montrer qu'il existe  $K \subset A$  un compact tel que  $\nu_1(K) > 0$ . Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit  $\rho$  un noyau régularisant. Montrer que (14) est vraie si  $\psi := (\text{sgn } g \chi_K) * \rho_\varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

- e) Généraliser ce qui précède à des fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}$ .