Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Année 2022–2023

Feuille de TD # 2
# Espaces de Hilbert

**Cadre.** Dans ce qui suit, $H$ est un *espace de Hilbert réel* (sauf si l'énoncé précise qu'il s'agit d'un espace de Hilbert complexe), et $E$ un *espace préhilbertien réel*. Le produit scalaire, respectivement la norme induite sur $H$ ou $E$, sont notés $\langle\,,\rangle$, respectivement $\|\ \|$.

**Exercice # 1.** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Montrer l'équivalence

$$0 \text{ est un point de minimum de } f \iff f'(0)\geq 0.$$

**Exercice # 2.** Montrer que, pour tout $x\in E$,

$$\|x\|=\max\{\langle x,y\rangle\,;\,y\in E,\|y\|\leq 1\}.$$

**Exercice # 3.** Montrer que

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right],\ \forall\,x,y\in E.$$

**Exercice # 4.** On considère un espace vectoriel réel $X$ muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,\ \forall\,x,y\in X.$$

L'objectif est de montrer que $X$ muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire induisant $\|\ \|$. Compte tenu de l'exercice précédent, posons

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right],\ \forall\,x,y\in X.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

a) Montrer que, pour tout $x,y\in X$, on a $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$, $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$ et $\langle -x,y\rangle=\langle x,-y\rangle=-\langle x,y\rangle$.
b) Montrer que, pour tout $x,y,z\in X$, on a $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$. (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x+y,z\rangle=2\langle y,z\rangle+\langle x-y,z\rangle$.)
c) Montrer, en utilisant b), que, si $x,y\in X$ et $r\in\mathbb{Q}$, on a $\langle rx,y\rangle=r\langle x,y\rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité reste encore vraie pour tout $r\in\mathbb{R}$.
d) En déduire que $\langle\,,\rangle$ est bien un produit scalaire sur $X$ qui induit la norme $\|\ \|$.

**Exercice # 5.** (Inégalité de Bessel) Soit $(e_j)_{1\leq j<N}\subset E$ (avec $N=2,3,\ldots,\infty$) une famille orthonormée. Montrer l'*inégalité de Bessel*

$$\sum_{1\leq j<N}\langle x,e_j\rangle^2\leq\|x\|^2,\ \forall\,x\in E.$$

**Exercice # 6.** Soit $(e_j)_{j\geq 1}\subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1}\subset\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1}a_je_j \text{ converge} \iff \sum_{j\geq 1}a_j^2<\infty.$$

En cas de convergence de l'une des séries, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1}a_je_j\right\|^2=\sum_{j\geq 1}a_j^2$.

**Exercice # 7.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces fermés orthogonaux de $H$. Montrer que $F+G$ est fermé.

**Exercice # 8.** Soit $F$ une partie non-vide de $H$. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de $H$.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}\,(F)}$. En particulier, si $F$ est un sous-espace fermé de $H$, alors $F^{\perp\perp} = F$.

**Exercice # 9.** Soit $F$ un sous-espace de $H$. Montrer l'équivalence

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

**Exercice # 10.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces fermés de $H$. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}$.

**Exercice # 11.** Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme usuelle.

a) Montrer que

$$G = \left\{ f \in H\,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de $H$, et déterminer $G^\perp$.

b) Soient $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact, et

$$F = \left\{ f \in C_c(\mathbb{R})\,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Montrer que $\overline{F} = G$.

c) Déterminer l'ensemble $\{g \in C_c(\mathbb{R})\,;\, g \in F^\perp\}$.

**Exercice # 12.** Soient $H = L^2(]0,1[)$ muni de sa norme usuelle et

$$V = \left\{ f \in H\,;\, \int_0^1 f = \int_0^{1/2} f = 0 \right\}.$$

a) Montrer que $V$ est un sous-espace fermé de $H$. Déterminer une base de $V^\perp$.

b) Soit $f(x) = x$. Calculer la projection orthogonale de $f$ sur $V$, puis $d(f, V)$.

**Exercice # 13.** Déterminer la quantité suivante

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2\, dx.$$

La borne inférieure est-elle atteinte ?

**Exercice # 14.**

a) Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de $H$.

b) Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par une famille orthonormée finie de $H$.

**Exercice # 15.** Montrer que $(x \mapsto e^{\imath nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0,2\pi[, \mathscr{B}_{]0,2\pi[}, 1/(2\pi)\nu_1)$.

**Exercice # 16.** Montrer qu'un espace préhilbertien qui a une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$ n'est pas complet. Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n = \sum_{j=1}^n (1/j^2) e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

**Exercice # 17.** On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx,\ \forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

a) Montrer que $\langle\,,\rangle$ est bien un produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\exp$ sur $[0,1]$. Montrer que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X],\langle\,,\rangle)$.

c) En déduire sur $(\mathbb{R}[X],\langle\,,\rangle)$ n'est pas complet.

**Exercice # 18.** Soit $X$ l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R}\ni t\mapsto e^{iwt}\in\mathbb{C}$ où $w$ parcourt $\mathbb{R}$. Pour $f,g\in X$, soit

$$\langle f,g\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

a) Montrer que $\langle\,,\rangle$ définit un produit scalaire sur $X$.

b) Vérifier que la famille $(t\mapsto e^{iwt})_{w\in\mathbb{R}}$ est orthonormée.

c) $X$ est-il un espace de Hilbert ?

**Exercice # 19.** Soit $V$ un sous-espace de $H$. Montrer que toute forme linéaire et continue sur $V$ se prolonge en une forme linéaire et continue sur $H$.

**Exercice # 20.** Montrer que tout convexe fermé non-vide de $H$ admet un unique élément de norme minimale.

**Exercice # 21.** Donner un exemple d'une partie $A$ fermée de $\ell^2$, telle que $\operatorname{dist}(0,A)=1$, mais ne contenant pas d'élément $a$ vérifiant $\|a\|_2=1$.

**Exercice # 22.** Soit $F\subset H$ un sous-espace fermé *non-nul*. Soit $P$ une projection de $H$ sur $F$ (c'est-à-dire : $P$ est un endomorphisme de $H$, $P\circ P=P$ et $P(H)=F$).

Montrer l'équivalence entre

1. $P$ est la projection orthogonale sur $F$.
2. $P$ est continu et $\|P\|=1$.
3. $|\langle P(x),x\rangle|\leq\|x\|^2$ pour tout $x\in H$.

**Exercice # 23.** (Polynômes de Laguerre) Soit $\mu$ la mesure sur $[0,\infty[$ de densité $e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $\mu(B)=\int_B e^{-x}dx$, $\forall\,B\in\mathscr{B}_{[0,\infty[}$). Les *polynômes de Laguerre* sont définis par

$$L_n=\frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(e^{-x}x^n),\forall\,n\geq 0.$$

Montrer les $L_n$ sont des polynômes, et que $(L_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée de $L^2([0,\infty[,\mathscr{B}_{[0,\infty[},\mu)$.

**Exercice # 24.** (Deux identités généralisées du parallélogramme) Soient $x_1,\ldots,x_n\in H$.

a) Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\|tx_1+(1-t)x_2\|^2+t(1-t)\|x_1-x_2\|^2=t\|x_1\|^2+(1-t)\|x_2\|^2.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

c) Montrer que, si $p\neq 2$, alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre $\ell^p$ et $\ell^2$. (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T:\ell^p(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i=T(e_i)$.)

**Exercice # 25.** Soit $H=L^2(\Omega,\mathscr{T},\mu)$. Soit $C=\{f\in H\,;\,f\geq 0\}$. Montrer que $C$ est un convexe fermé et que $P_C(f)=f\chi_{\{f\geq 0\}}$, $\forall\,f\in H$.

**Exercice # 26.** Soit $u\in\mathscr{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. $u$ est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $u^*u = \mathrm{Id}$.

(Indication : penser à l'identité de polarisation).

**Exercice # 27.** Si $H$ est *séparable*, montrer que tout ensemble orthonormé $E \subset H$ est au plus dénombrable. Indication : si $G$ est dénombrable et dense, construire une injection de $E$ dans $G$ en considérant des boules de rayon $1/2$.

**Exercice # 28.**

a) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

b) Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites de $E$ vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1, \forall\, n$.

   1. On suppose que $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.
   2. On suppose que $\|x_n + y_n\| \to 2$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.

**Exercice # 29.** Soient $H$ *séparable*, $(e_n) \subset H$ une base hilbertienne et $(f_n) \subset H$ une suite orthonormée. On suppose que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $(f_n)$ est également une base hilbertienne.

a) Soient $N \geq 0$ et $g \in H$ tel que $f_n \perp g$ pour tout $n \geq N$. Montrer l'inégalité

$$\left\| \sum_{n\geq N} \langle g, e_n\rangle e_n \right\|^2 \leq \|g\|^2 \sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur $g$ orthogonal à $e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.

c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k\geq N} \langle e_n, f_k\rangle f_k,\ \forall\, n < N.$$

Montrer que tout vecteur $g$ orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.

d) Soit $W$ l'orthogonal de l'espace $V$ engendré par les vecteurs $f_N, f_{N+1}, \ldots$ Montrer que $\eta_n \in W$ pour tout $n < N$ et que $W$ est engendré par $\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}$.

e) Conclure.

**Exercice # 30.** Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée de $H$ et $A := \{e_n\,;\, n \geq 0\}$.

a) Montrer que $A$ est fermé et borné. $A$ est-il compact ?

b) Soit $(\alpha_n)$ une suite de réels positifs de carrés sommables. On note $K$ l'ensemble des éléments $x \in H$ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ où $|a_n| \leq \alpha_n$ pour tout $n$. Montrer que l'ensemble $K$ est compact.