Exercices corrigés

Exercice # 1. Déterminer les bornes sup et inf des ensembles ci-dessous :
a) $A_1 := \left\{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \; ; \, n \in \mathbb{N}\right\}$;
b) $A_2 := \left\{\frac{12n + 10^{-n}}{3n+2} \; ; \, n \in \mathbb{N}\right\}$;
c) $A_3 := \left\{\left(1 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \ln n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Solution.
a) $A_1 := \left\{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \; ; \, n \in \mathbb{N}\right\} = \{0, +1, -1\}$. A_1 est fini, donc $\sup A_1 = \max A_1 = +1$ et $\inf A_1 = \min A_1 = -1$.
b) $\frac{12n + 10^{-n}}{3n+2} = 4 - \frac{8 - 10^{-n}}{3n+2}$. $\nu_n = \frac{8 - 10^{-n}}{3n+2}$ est une suite décroissante. La valeur maximale de ν_n est donc $\nu_0 = \frac{7}{2}$. De plus, $\lim_n \nu_n = 0$. Donc $\inf\left\{\frac{8 - 10^{-n}}{3n+2} \; ; \, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$. Il s'ensuit que $\sup A_2 = 4$ et $\inf A_2 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$.
c) On a $\left(1 + \sin\left(4n\frac{\pi}{2}\right)\right) \ln(4n) = \ln n + \ln 4$. Donc $\sup A_3 \geq \sup\{\ln n + \ln 4 \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\} = +\infty$, car $\ln n$ tend vers $+\infty$. De plus $\inf A_3 = \min A_3 = 0$, car $\left(1 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \ln n$ est positive pour $n \geq 1$ et 0 pour $n = 1$. $\square$

Exercice # 2. Montrer que $x_n \leq y_n, \forall\, n \geq n_0 \implies \limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n$.

Solution. Nous allons utiliser le fait (énoncé en cours) que

$$\limsup_n x_n = \max\left\{\lim_k x_{n_k} \; ; \, (x_{n_k})_k \text{ est une sous-suite de } (x_n)_n \text{ ayant une limite}\right\}. \tag{1}$$

Ici, on autorise les valeurs $\pm\infty$ pour la limite.

Soit donc $(x_{n_k})_k$ une sous-suite pour laquelle le max est atteint. Quitte à passer encore une fois à une sous-suite, on peut supposer que $(y_{n_k})_k$ a une limite. Comme $x_{n_k} \leq y_{n_k}$ pour tous sauf un nombre fini de k, on a que

$$\limsup_n x_n = \lim_k x_{n_k} \leq \lim_k y_{n_k} \leq \limsup_n y_n. \qquad \square$$

Autre solution. Soient $X_n := \sup_{k \geq n} x_k$, $Y_n := \sup_{k \geq n} y_k$.
Pour $k \geq n \geq n_0$, nous avons $x_k \leq y_k \leq Y_n$, d'où, en prenant le sup sur k, $X_n \leq Y_n$. Il s'ensuit que

$$\limsup_n x_n = \lim_n X_n \leq \lim_n Y_n = \limsup y_n. \qquad \square$$

Le lemme suivant sera utilisé dans la résolution de l'exercice #3.

Lemme. Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels et soit $(n_k)_k$ et $(m_\ell)_\ell$ des suites strictement croissantes d'entiers telles que

$$\mathbb{N} = \{n_k\,;\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_\ell\,;\, \ell \in \mathbb{N}\}$$

et les deux sous-suites $(x_{n_k})_k$ et $(x_{m_\ell})_\ell$ ont des limites. Alors

$$\limsup_n x_n = \max(\lim_k x_{n_k}, \lim_\ell x_{m_\ell}),\ \liminf_n x_n = \min(\lim_k x_{n_k}, \lim_\ell x_{m_\ell}).$$

Énoncé analogue pour un nombre, fini mais arbitraire, de sous-suites.

Avant de procéder à la preuve du lemme, décrivons un

Principe de preuve. Si a et b sont des réels, pour montrer que $a \leq b$, il suffit de montrer que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Pour montrer que $a \geq b$, il suffit de montrer que $a \geq b - \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$

Lorsque $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, pour montrer que $a \leq b$, il suffit de montrer que $a \leq M$, $\forall\, M > b$ (avec $M \in \mathbb{R}$).

De même, si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pour montrer que $a \geq b$, il suffit de montrer que $a \geq M$, $\forall\, M < b$ (avec $M \in \mathbb{R}$).

Démonstration du lemme. Nous allons faire la preuve uniquement pour $\limsup$ et deux sous-suites, les autres cas étant analogues.

Soit $z := \max(\lim_k x_{n_k}, \lim_\ell x_{m_\ell})$. L'inégalité $\limsup_n x_n \geq z$ suit de (1) ci-dessus. En particulier, si $z = \infty$, alors nous avons nécessairement égalité.

Supposons $z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Pour montrer que $\limsup_n x_n \leq z$, considérons (comme dans le principe de preuve décrit ci-dessus) un réel M tel que $M > z$, de sorte que $M > \lim_k x_{n_k}$ *et* $M > \lim_\ell x_{m_\ell}$. Par définition de la limite, il existe $k_0, \ell_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant $x_{n_k} < M$, $\forall\, k \geq k_0$, et $x_{m_\ell} < M$, $\forall\, \ell \geq \ell_0$. Soit $p_0 := \max(n_{k_0}, m_{\ell_0})$. Si $p \geq p_0$, alors soit $x_p = x_{n_k}$ pour un $k \geq k_0$, soit $x_p = x_{m_\ell}$ pour un $\ell \geq \ell_0$. Dans les deux cas, nous avons $x_p < M$. Il s'ensuit que

$$X_n := \sup_{p \geq n} x_p \leq M, \forall\, n \geq p_0,$$

d'où

$$\limsup_n x_n = \lim_n X_n \leq M,\ \forall\, M > z.$$

Le principe de preuve permet de conclure. $\square$

Exercice # 3. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ pour les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, respectivement par les formules :

a) $x_n := (n+1)^{(-1)^n}$.

b) $x_n := \left(2 + \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\ \dfrac{n}{2n+1}$.

Solution.

a) Considérons les sous-suites $x_{2n} = 2n + 1$ et $x_{2n+1} = 1/(2n+2)$. Nous avons $\lim_n x_{2n} = \infty$ et $\lim_n x_{2n+1} = 0$; le lemme implique $\limsup_n x_n = \infty$ et $\liminf_n x_n = 0$.

b) La preuve du lemme s'adapte à un nombre fini arbitraire de sous-suites (à la place de deux sous-suites).

Considérons les sous-suites $x_{4n} = (12n)/(8n+1)$, $x_{2n+1} = 2(2n+1)/(2(2n+1)+1)$ et $x_{4n+2} = (4n+2)/(2(4n+2)+1)$. On a que $\lim_n x_{4n} = 3/2$, $\lim_n x_{2n+1} = 1$ et $\lim_n x_{4n+2} = 1/2$. On conclut que $\limsup_n x_n = 3/2$ et $\liminf_n x_n = 1/2$.

$\square$

Exercice # 4.

a) Montrer que $x \in \limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles A_n.

b) Montrer que $x \in \liminf A_n$ si et seulement si il existe un n_1 (qui peut dépendre de $x \in X$) tel que $x \in A_n, \forall\, n \geq n_1$.

c) Pour tout $x \in X$, montrer les égalités

$$\chi_{\limsup A_n}(x) = \limsup \chi_{A_n}(x), \; \chi_{\liminf A_n}(x) = \liminf \chi_{A_n}(x).$$

d) Soit $(A_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante de parties de X. Montrer que

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n\geq n_1} A_n, \; \forall\, n_1 \geq n_0.$$

Quel est l'analogue de cette formule pour une suite décroissante ?

e) Montrer que

$$\limsup A_n = (\limsup A_{2n}) \cup (\limsup A_{2n+1}) \,, \; \liminf A_n = (\liminf A_{2n}) \cap (\liminf A_{2n+1}) \,.$$

Solution.

a) $x \in \limsup A_n \iff x \in \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \forall\, n \,:\, x \in \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \forall n, \exists\, k \geq n \,:\, x \in A_k.$

Prenons la négation

$$x \notin \limsup A_n \iff \exists\, n, \forall\, k \geq n \,:\, x \notin A_k.$$

L'énoncé à droite veut dire qu'il existe n tq, si $x \in A_k$, alors $k \leq n$, c.a.d. x appartient au plus à un nombre fini d'ensembles. Donc $x \in \limsup A_n$ veut dire que x appartient à une infinité d'ensembles A_k.

b) $x \in \liminf A_n \iff x \in \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \iff \exists\, n \,:\, x \in \bigcap_{k\geq n} A_k \iff \exists\, n, \forall\, k \geq n \,:\, x \in A_k.$

c) *Justification de la première égalité.* De a), nous obtenons

$$\begin{aligned}\chi_{\limsup A_n}(x) = 1 &\iff \forall\, n, \exists\, k \geq n \,:\, x \in A_k \iff \forall\, n, \exists\, k \geq n \,:\, \chi_{A_k}(x) = 1 \\ &\overset{(a)}{\iff} \forall\, n, \sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1 \overset{(b)}{\iff} \lim_n \sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1 \\ &\iff \limsup_n \chi_{A_n}(x) = 1.\end{aligned} \tag{2}$$

Justification de *(a)* : une fonction caractéristique χ_A ne prend que les valeurs 0 et 1. Donc

$$\sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1 \iff \exists\, k \geq n \,:\, \chi_{A_k}(x) = 1.$$

Justification de *(b)* : la suite $(\sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x))_n$ décroît et ne prend que les valeurs 0 ou 1. Donc soit elle ne prend que la valeur 1, et a la limite 1, soit elle prend la valeur 0, et dans ce cas elle tend vers 0. Finalement, comme les fonctions $\chi_{\limsup A_n}$ et $\limsup_n \chi_{A_n}$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1, on déduit de (2) que $\chi_{\limsup A_n}(x) = \limsup_n \chi_{A_n}(x)$, d'où le résultat.

Justification de la deuxième égalité. De b), nous obtenons

$$\begin{aligned}\chi_{\liminf A_n}(x)=1 &\iff \exists\, n,\ \forall\, k\geq n\ :\ x\in A_k \iff \exists\, n,\ \forall\, k\geq n\ :\ \chi_{A_k}(x)=1\\ &\iff \exists\, n\ :\ \inf_{k\geq n}\chi_{A_k}(x)=1 \overset{(c)}{\iff} \liminf_n \inf_{k\geq n}\chi_{A_k}(x)=1\\ &\iff \liminf_n \chi_{A_n}(x)=1.\end{aligned}$$

La justification de *(c)* est similaire à celle de *(b)* : la suite $(\inf_{k\geq n}\chi_{A_k}(x))_n$ croît et ne prend que les valeurs 0 ou 1. Donc soit elle ne prend que la valeur 0, et a la limite 0, soit elle prend la valeur 1, et dans ce cas elle tend vers 1.

Nous concluons comme pour la première égalité.

d) La suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante, nous avons $\bigcup_{k\geq n} A_k=\bigcup_{k\geq n_1} A_k$, $\forall\, n\geq n_1$, d'où

$$\limsup_n A_n=\bigcap_{n\geq n_0}\bigcup_{k\geq n} A_k=\bigcap_{n\geq n_0}\bigcup_{k\geq n_1} A_k=\bigcup_{n\geq n_1} A_n.$$

La suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante, nous avons $\bigcap_{k\geq n} A_k=A_n$, d'où

$$\liminf_n A_n=\bigcup_{n\geq n_0}\bigcap_{k\geq n} A_k=\bigcup_{n\geq n_0} A_n=\bigcup_{n\geq n_1} A_n.$$

Preuves similaires pour les suites décroissantes.

e) De a), nous avons

$$\begin{aligned}&x \text{ appartient à } \limsup_n A_n \iff x \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité de } n\\ &\iff x \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité de } n \text{ pairs } \textit{ou} \text{ pour une infinité de } n \text{ impairs}\\ &\iff x\in\limsup_n A_{2n}\ \textit{ou}\ x\in\limsup_n A_{2n+1} \iff x\in\limsup_n A_{2n}\cup\limsup_n A_{2n+1}.\end{aligned}$$

Pour la $\liminf$, procédons par double inclusion.

$$\begin{aligned}&x\in\liminf_n A_n \implies \exists\, n,\ \forall\, k\geq n\ :\ x\in A_k \implies \exists\, n,\ \forall\, \ell\geq n\ :\ x\in A_{2\ell}\ \textit{et}\ x\in A_{2\ell+1}\\ &\implies x\in\liminf_n A_{2n}\ \textit{et}\ x\in\liminf_n A_{2n+1} \implies x\in\liminf_n A_{2n}\cap\liminf_n A_{2n+1}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}&x\in\liminf_n A_{2n}\cap\liminf_n A_{2n+1} \implies x\in\liminf_n A_{2n}\ \textit{et}\ x\in\liminf_n A_{2n+1}\\ &\implies \exists\, n_1,\ n_2,\ \forall\, k\geq n_1\ :\ x\in A_{2k}\ \textit{et}\ \forall\, k\geq n_2\ :\ x\in A_{2k+1}\\ &\implies \forall\, \ell\geq n:=\max(2n_1,2n_2+1)\ :\ x\in A_\ell \implies x\in\liminf_n A_n.\end{aligned}$$

□

Exercice # 5. Déterminer la tribu $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathscr{A}:=\{\{n\}\,;\, n\in\mathbb{Z}\}$.

Solution. Étape 1. Si $A\subset\mathbb{Z}$, alors $A\in\mathscr{T}(\mathscr{A})$. En effet, nous avons A a. p. d. (car $A\subset\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est dénombrable). Comme $A=\cup_{n\in\mathscr{A}}\{n\}$, il s'ensuit que A est une union a. p. d. d'éléments de $\mathscr{A}$ (donc d'éléments de $\mathscr{T}(\mathscr{A})$), d'où $A\in\mathscr{T}(\mathscr{A})$.

Étape 2. Si $A\subset\mathbb{R}$ et $A^c\subset\mathbb{Z}$, alors $A\in\mathscr{T}(\mathscr{A})$. En effet, la première étape montre que $A^c\in\mathscr{T}(\mathscr{A})$. En utilisant l'axiome ii) d'une tribu, nous obtenons $A=(A^c)^c\in\mathscr{T}(\mathscr{A})$.

Conclusion provisoire. Nous avons

$$\mathscr{T}:=\{A\subset\mathbb{R}\,;\, A\subset\mathbb{Z} \text{ ou } A^c\subset\mathbb{Z}\}\subset\mathscr{T}(\mathscr{A}). \tag{3}$$

Le lemme qui suit montre que $\mathscr{T}$ est une tribu. Par ailleurs, nous avons $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, car $A \in \mathscr{A} \implies A \subset \mathbb{Z} \implies A \in \mathscr{T}$.

Nous concluons comme suit : de $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, nous déduisons que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$ (la dernière égalité découlant du fait que $\mathscr{T}$ est une tribu). En comparant cette inclusion à (3), nous obtenons que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}$. □

Lemme. Soient $Y \subset X$ deux ensembles. Soit

$$\mathscr{T} := \{A \subset X\,;\, A \subset Y \text{ ou } A^c \subset Y\}.$$

Alors $\mathscr{T}$ est une tribu.

Démonstration. *Étape 1.* $\emptyset \in \mathscr{T}$, car $\emptyset \subset Y$.

Étape 2. Si $A \in \mathscr{T}$, alors $A^c \in \mathscr{T}$. Nous avons deux cas à examiner.

1. Si $A \subset Y$, alors $(A^c)^c = A \subset Y$, et donc $A^c \in \mathscr{T}$.
2. Si $A^c \subset Y$, alors, clairement $A^c \in \mathscr{T}$.

Dans tous les cas possibles, si $A \in \mathscr{T}$, alors $A^c \in \mathscr{T}$.

Étape 3. Si $(A_n) \subset \mathscr{T}$, alors $\cup_n A_n \in \mathscr{T}$. À nouveau, nous avons deux cas à examiner.

1. Si $A_n \subset Y$, $\forall n$, alors $\cup_n A_n \subset Y$, et donc $\cup_n A_n \in \mathscr{T}$.
2. S'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_{n_0} \not\subset Y$, alors $(A_{n_0})^c \subset Y$. Il s'ensuit que

   $$(\cup_n A_n)^c = \cap_n (A_n)^c \subset (A_{n_0})^c \subset Y,$$

   et donc $\cup_n A_n \in \mathscr{T}$.

Dans tous les cas possibles, si $(A_n) \subset \mathscr{T}$, alors $\cup_n A_n \in \mathscr{T}$.

$\mathscr{T}$ vérifie donc les axiomes d'une tribu. □

Exercice # 6. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $(A_n) \subset \mathscr{T}$ une suite d. d. d. telle que $X = \sqcup_n A_n$. Pour chaque n, soit $f_n : A_n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := f_n(x)$ si $x \in A_n$. Montrer que f est mesurable.

Solution. Posons $\widetilde{f}_n : X \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in A_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Par définition, la fonction $\widetilde{f}_n$ est mesurable.

Notons l'égalité suivante, vraie pour tout ensemble $B \subset \mathbb{R}$:

$$(f_n)^{-1}(B) \cap A_n = (\widetilde{f}_n)^{-1}(B) \cap A_n,\ \forall n. \tag{4}$$

Soit $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Nous avons (via (4))

$$f^{-1}(B) = \cup_n (f_n)^{-1}(B) = \cup_n \left((f_n)^{-1}(B) \cap A_n\right) = \cup_n \left((\widetilde{f}_n)^{-1}(B) \cap A_n\right) \in \mathscr{T}. \tag{5}$$

Pour justifier l'appartenance finale, nous invoquons dans l'ordre : $(\widetilde{f}_n)^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ (en utilisant le fait que $\widetilde{f}_n$ est mesurable et le théorème de caractérisation des fonctions mesurables), puis $(\widetilde{f}_n)^{-1}(B) \cap A_n \in \mathscr{T}$ (de ce qui précède, $A_n \in \mathscr{T}$ et le fait que $\mathscr{T}$ est une tribu), d'où, finalement, $\cup_n \left((\widetilde{f}_n)^{-1}(B) \cap A_n\right) \in \mathscr{T}$ (de ce qui précède et l'axiome iii) de la tribu).

De (5) et du théorème de caractérisation des fonctions mesurables, f est mesurable. □

Exercice # 7. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Pour $0 < M < \infty$, soit

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq M \\ M, & \text{si } f(x) > M \\ -M, & \text{si } f(x) < -M \end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable, $\forall\, M > 0$.

Solution. « $\implies$ » Soit $g_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_M(t) := \begin{cases} t, & \text{si } |t| \leq M \\ M, & \text{si } t > M \\ -M, & \text{si } t < -M \end{cases}$. Alors g_M est continue. Il s'ensuit que $f_M = g_M \circ f$ est mesurable (composée d'une fonction continue et d'une fonction mesurable).
« $\impliedby$ » Si $n \geq |f(x)|$, alors $f_n(x) = f(x)$. Il s'ensuit que $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Chaque f_n étant mesurable, f l'est également (comme limite – simple – de fonctions mesurables). $\square$

Exercice # 8. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, montrer que $g \circ f$ est étagée.

Solution. Soient $a_j \in \mathbb{R}$ et $A_j \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, $j = 1, \ldots, k$, tels que $g = \sum_{j=1}^k a_j\, \chi_{A_j}$. Alors

$$g \circ f = \sum_{j=1}^k a_j\, \chi_{A_j} \circ f = \sum_{j=1}^k a_j\, \chi_{f^{-1}(A_j)}. \tag{6}$$

Comme $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et $A_j \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, nous avons $f^{-1}(A_j) \in \mathscr{T}$, $\forall\, j$ (théorème-définition des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$). De (6), nous obtenons que $g \circ f$ est étagée. $\square$

Exercice # 9. Soit $\mathscr{C}$ un clan sur X. Soit $Y \subset X$. Soit $\mathscr{C}_Y := \{A \cap Y\,;\, Y \subset X\}$. Montrer que $\mathscr{C}_Y$ est un clan sur Y.

Solution. Étape 1. $\emptyset \in \mathscr{C}_Y$, car $\emptyset = \emptyset \cap Y$ et $\emptyset \in \mathscr{C}$ (axiome i) du clan).
Étape 2. Si $B \in \mathscr{C}_Y$, alors $Y \setminus B \in \mathscr{C}_Y$. En effet, soit $A \in \mathscr{C}$ tel que $B = A \cap Y$. Alors

$$Y \setminus B = Y \cap B^c = Y \cap (A^c \cup Y^c) = (Y \cap A^c) \cup (Y \cap Y^c) = A^c \cap Y \in \mathscr{C}_Y,$$

car $A^c \in \mathscr{C}$ (axiome ii) du clan).
Étape 3. Si $B_1, B_2 \in \mathscr{C}_Y$, alors $B_1 \cup B_2 \in \mathscr{C}_Y$. En effet, soient $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$ tels que $B_j = A_j \cap Y$, $j = 1, 2$. Alors

$$B_1 \cup B_2 = (A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = (A_1 \cup A_2) \cap Y \in \mathscr{C}_Y,$$

car $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{C}$ (axiome iii) du clan).
Il s'ensuit que $\mathscr{C}_Y$ vérifie les axiomes du clan sur Y. $\square$

Exercice # 10. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de X. Montrer que $\cup_{j=1}^n X_j \nearrow \cup_n X_n$.

Solution. Nous avons clairement $\cup_{j=1}^n X_j \nearrow$. Posons $Y := \cup_n \cup_{j=1}^n X_j$, de sorte que $\cup_{j=1}^n X_j \nearrow Y$. Nous montrons par double inclusion que $Y = \cup_n X_n$.
Étape 1. Nous avons $Y \subset \cup_n X_n$. En effet, pour chaque n, $\cup_{j=1}^n X_j \subset \cup_j X_j$, d'où $\cup_n \cup_{j=1}^n X_j \subset \cup_j X_j = \cup_n X_n$.
Étape 2. Nous avons $\cup_n X_n \subset Y$. En effet, nous avons $X_n \subset \cup_{j=1}^n X_j$, $\forall\, n$, d'où $\cup_n X_n \subset \cup_n \cup_{j=1}^n X_j = Y$. $\square$

Exercice # 11.

a) Montrer que la fonction

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{\sin x}{e^x - 1},\ \forall\, x > 0,$$

est Lebesgue intégrable sur $]0,\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ nous avons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Solution. Préliminaire. Notons le calcul suivant d'intégrale généralisée :

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha x}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\alpha},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{7}$$

a) f étant continue, il suffit de montrer que l'intégrale généralisée de f est absolument convergente (proposition 6.43 b)).

Étude de $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$. Nous avons $\dfrac{|\sin x|}{e^x - 1} \sim_{0+} 1$. Le critère de Riemann combiné avec le théorème des équivalents donne la convergence de l'intégrale.

Étude de $\displaystyle\int_1^{\infty} |f(x)|\, dx$. Nous avons

$$|f(x)| \leq \frac{1}{e^x - 1} \sim_{\infty} \frac{1}{e^x}.$$

La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\, dx$ (qui vaut $1 - e^{-1}$) combinée avec le théorème des équivalents donne d'abord la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx$, puis celle de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{e^x - 1}\, dx$.

En combinant les deux études, nous obtenons la convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{e^x - 1}\, dx$.

Autre approche. En utilisant la majoration $|\sin x| \leq |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$, la monotonie des intégrales généralisées, une intégration par parties et (7), nous obtenons

$$\int_0^{\infty} |\sin x\, e^x|\, dx \leq \int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = -\left[x\, e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1 < \infty.$$

b) Comme $|e^{-x}| = e^{-x} < 1, \forall\, x > 0$, nous avons

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x}\frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{n \geq 0} (e^{-x})^n = \sum_{n \geq 0} e^{-x-nx} = \sum_{n \geq 1} e^{-nx},$$

d'où la conclusion, en multipliant ce qui précède par $\sin x$.

c) De (7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin(\gamma x)\, dx &= \frac{1}{2\imath} \int_0^{\infty} e^{-\beta x}\, \left[e^{\imath\gamma x} - e^{-\imath\gamma x}\right]\, dx \\ &= \frac{1}{2\imath}\left[\frac{1}{\beta - \imath\gamma} - \frac{1}{\beta + \imath\gamma}\right] = \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2},\ \forall\, \beta \in]0,\infty[,\ \forall\, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Il s'ensuit de (8) que

$$\int_0^\infty e^{-nx} \sin x \, dx = \frac{1}{n^2+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc (au vu de la question b)) l'identité à montrer revient à

$$\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-nx} \sin x \, dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-nx} \sin x \, dx. \tag{9}$$

Nous présentons deux preuves de (9), l'une utilisant le théorème de convergence dominée (théorème 7.2), l'autre le théorème 7.22 .

Preuve de (9) *via le théorème de convergence dominée.* Par linéarité des intégrales généralisées, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-nx} \sin x \, dx - \sum_{n<N} \int_0^\infty e^{-nx} \sin x \, dx &= \int_0^\infty \sum_{n\geq N} e^{-nx} \sin x \, dx \\ &= \int_0^\infty f_N(x) \, dx,\end{aligned}$$

où

$$f_N(x) := \sum_{n\geq N} e^{-nx} \sin x = e^{-Nx} \frac{1}{1-e^{-x}} \sin x = \frac{1}{e^{(N-1)x}} f(x), \ \forall\, N \geq 1, \ \forall\, x > 0.$$

La majoration $|f_N(x)| \leq |f(x)|, \forall\, N \geq 1, \forall\, x > 0$, montre que l'intégrale généralisée de f_N est absolument convergente, et donc coïncide avec $\displaystyle\int_{]0,\infty[} |f_N| \, d\nu_1$ (proposition 6.43 b)). De ce qui précède, nous devons montrer que

$$\lim_N \int_{]0,\infty[} |f_N| \, d\nu_1 = 0.$$

Ceci s'obtient par convergence dominée (théorème 7.2), en notant que :

* À $x > 0$ fixé, $f_N(x) \to 0$;
* Nous avons la majoration $|f_N(x)| \leq |f(x)|, \forall\, N \geq 1, \forall\, x > 0$, et $|f|$ est ν_1-intégrable (question a)).

Preuve de (9) *via le théorème 7.22.* Nous devons montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \, d\nu_1 < \infty$. En utilisant la proposition 6.43 b), la majoration $|\sin x| \leq |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$, la monotonie des intégrales généralisées, une intégration par parties, l'identité (7) et le critère de Riemann pour les séries, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \, d\nu_1 &= \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty |e^{-nx}| \, |\sin x| \, dx \leq \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty x \, e^{-nx} \, dx \\ &= \sum_{n\geq 1} \left\{ -\frac{1}{n} \left[x \, e^{-nx} \right]_0^\infty + \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-nx} \, dx \right\} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-nx} \, dx \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty. \quad \square\end{aligned}$$

Exercice # 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{e}^{-tx} \, dx.$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f'.
c) En déduire une expression simple de f.

Solution.

a) *Étape 1. f est continue.* L'intégrande (en x) étant continue et positive, nous avons (proposition 6.43 a))

$$f(t) = \int_{]0,\infty[} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, d\nu_1(x),\ \forall\, t \geq 0.$$

Pour vérifier la continuité de f, nous appliquons le théorème 7.12 à la fonction

$$k(x,t) := \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx},\ \forall\, x \in]0,\infty[,\ \forall\, t \in [0,\infty[.$$

* À t fixé, $x \mapsto k(x,t)$ est (clairement) continue, donc borélienne.
* À x fixé, $t \mapsto k(x,t)$ est (clairement) continue.
* Nous avons

$$|k(x,t)| \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 := g(x),\ \forall\, x \in]0,\infty[,\ \forall\, t \in [0,\infty[.$$

* La majorante g est continue, donc borélienne, et (preuve plus bas) intégrable.

De ce qui précède et du théorème 7.12, f est continue sur $[0,\infty[$.
Il reste à vérifier que g est intégrable. La proposition 6.43 a) montre qu'il suffit de vérifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\, dx$ est finie.

Étude de $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$. Nous avons $g(x) \sim_{0+} 1$. Le critère de Riemann combiné avec le théorème des équivalents donne la convergence de l'intégrale.

Étude de $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\, dx$. Nous avons $g(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$. Le critère de Riemann combiné avec le critère de comparaison donne la convergence de l'intégrale.

En combinant les deux études, nous obtenons la convergence de $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\, dx$.

Étape 2. $f \in C^1$. Nous appliquons le théorème 7.18.

* À t fixé, $x \mapsto k(x,t)$ est intégrable (ceci suit de l'étape 1).
* À x fixé, $t \mapsto k(x,t)$ est (clairement) de classe C^1.
* Soit $[a,b] \subset]0,\infty[$ un intervalle compact arbitraire (ce qui correspond à considérer une boule fermée arbitraire dans $]0,\infty[$). Si $x \in]0,\infty[$ et $t \in [a,b]$, nous avons (en utilisant le fait que $t \geq a$ et l'inégalité $|\sin x| \leq |x|, \forall\, x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}|\partial_t k(x,t)| &= \left|-\frac{\sin^2 x}{x}\, e^{-tx}\right| \leq \left|\frac{\sin^2 x}{x}\right| e^{-ax}\\ &\leq x\, e^{-ax} := h(x),\ \forall\, x > 0,\ \forall\, t \in [a,b].\end{aligned}$$

La majorante h est continue, donc borélienne. Par ailleurs, elle est Lebesgue intégrable. En effet, son intégrabilité revient (proposition 6.43 a)) à $\displaystyle\int_0^\infty h(x)\, dx < \infty$, ce qui suit de la solution de la question a) de l'exercice 11.

De ce qui précède et du théorème 7.18, f est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et (en utilisant également le fait que, de ce qui précède, $\partial_t(x,t)$ est intégrable en x et la proposition 6.43 b)) :

$$f'(t) = \int_{]0,\infty[} \partial_t k(x,t)\, d\nu_1(x) = -\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, e^{-tx}\, dx. \tag{10}$$

Étape 3. $f \in C^2$. Nous appliquons le théorème 7.18 à f', donnée par (10).

* À t fixé, $x \mapsto \partial_t h(x,t)$ est intégrable (ceci suit de l'étape 2).
* À x fixé, $t \mapsto \partial_t k(x,t)$ est (clairement) de classe C^1.
* Soit $[a,b] \subset]0,\infty[$ un intervalle compact arbitraire. Nous avons

  $$|\partial_t(\partial_t k(x,t))| = |\sin^2 x\, e^{-tx}| \leq \ell(x) := e^{-ax},\ \forall\, x \in]0,\infty[, \forall\, t \in [a,b].$$

  ℓ étant intégrable (voir l'exercice 11), il s'ensuit, de ce qui précède, du théorème 7.18 et de la proposition 6.43 b), que $f \in C^2(]0,\infty[$ et

  $$f''(t) = \int_{]0,\infty[} \sin^2 x\, e^{-tx}\, d\nu_1(t) = \int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-tx}\, dx.$$

b) *Étape 1. Calcul de f''.* En utilisant la formule

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^2 = -\frac{e^{2\imath x} + e^{-2\imath x} - 2}{4}$$

et (7), nous obtenons

$$f''(t) = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{t-2\imath} + \frac{1}{t+2\imath} - \frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+4}\right\}. \tag{11}$$

Étape 2. Calcul de $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$. Soit $(t_n) \subset [0,\infty[$ telle que $t_n \to \infty$. Soit $f_n(x) := k(x,t_n)$, $\forall\, x > 0$, de sorte que $f(t_n) = \displaystyle\int_{]0,\infty[} f_n\, d\nu_1$.

* Nous avons $f_n(x) \to 0$, $\forall\, x > 0$.
* Nous avons $|f_n| \leq g$, avec g la majorante de la question a), qui est intégrable.

De ce qui précède et du théorème de convergence dominée 7.2, nous avons

$$\lim_n f(t_n) = \lim_n \int_{]0,\infty[} f_n\, d\nu_1 = \int_{]-,\infty[} 0\, d\nu_1 = 0.$$

La suite $t_n \to \infty$ étant arbitraire, nous obtenons que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Étape 3. Calcul de $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t)$. Raisonnement similaire à celui de l'étape 2. Le seul changement vient de la majoration. Soit $(t_n) \subset]0,\infty[$ telle que $t_n \to \infty$. Le lemme ci-dessous montre qu'il existe $a > 0$ tel que $t_n \geq a$, $\forall\, n$. Nous avons alors la majoration

$$|\partial_t k(x,t_n)| = \frac{\sin^2 x}{x}\, e^{-t_n x} \leq x\, e^{-ax},\ \forall\, x > 0,\ \forall\, n.$$

La majorante étant intégrable (exercice 11), nous obtenons, comme dans l'étape 2, que $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$.

c) *Étape 1. Calcul de f'.* De la formule de f'', nous obtenons que

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left\{\ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+4)\right\} + C = \frac{1}{4}\ln\frac{t^2}{t^2+4} + C,\ \forall\, t > 0, \tag{12}$$

avec $C \in \mathbb{R}$ une constante à déterminer. En faisant $t \to \infty$ dans (12) et en utilisant la question précédente, nous obtenons $C = 0$.

Étape 3. Calcul de f. En intégrant (12), nous obtenons, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int f'(t)\,dt &= \int \left\{\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\ln(t^2+4)\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}t\,\ln t - \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{4}t\,\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2+4}\,dt \\
&= \frac{1}{2}t\,\ln t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t\,\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\int\left\{1 - \frac{4}{t^2+4}\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}t\,\ln t - \frac{1}{4}t\,\ln(t^2+4) - \arctan(t/2) + D \\
&= -\frac{1}{4}t\,\ln\left(1 + \frac{4}{t^2}\right) - \arctan(t/2) + D,
\end{aligned}$$

d'où

$$f(t) = -\frac{1}{4}t\,\ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right) - \arctan(t/2) + D, \tag{13}$$

avec une constante $D \in \mathbb{R}$ à déterminer.
En utilisant le fait que

$$t\,\ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right) \sim_\infty t\,\frac{4}{t^2}$$

et la question b), nous obtenons, en faisant $t \to \infty$ dans (13), que $D = \pi/2$, d'où

$$f(t) = -\frac{1}{4}t\,\ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right) - \arctan(t/2) + \frac{\pi}{2}, \forall\, t > 0. \tag{14}$$

Il reste à déterminer $f(0)$. En utilisant la continuité de f sur $[0,\infty[$ (question a)) et en faisant $t \to 0+$ dans (14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{t\to 0+}\left\{-\frac{1}{4}t\,\ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right) - \arctan(t/2) + \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}(4/x)^{1/2}\ln(1+x) = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

par croissances comparées.
Au passage, nous avons obtenu la *formule de Fresnel*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Lemme. Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels telle que $t_n \to \infty$. Alors $(t_n)_{n\geq 0}$ a un plus petit terme.

Démonstration. Soit $M > t_0$. Il existe $n_0 > 0$ tel que $t_n > M, \forall\, n \geq n_0$. Si $a := \min\{t_0, \ldots, t_{n_0-1}\}$, alors il existe un $k \in \{0, \ldots, n_0-1\}$ tel que $a = t_k$. Par construction, $t_k \leq t_j$, $j = 0, \ldots, n_0-1$. Par ailleurs, $a = t_k \leq t_0 < M < t_n, \forall\, n \geq n_0$. Il s'ensuit que t_k est le plus petit terme de la suite. $\square$

Exercice # 13. (Fonction Gamma d'Euler)

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$, soit $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$; Γ est la *fonction Gamma d'Euler.*

b) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que Γ est strictement convexe.

Solution.

a) En utilisant la proposition 6.43 a), il suffit de montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ converge.

Étude de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$. Nous avons $t^{x-1}\,e^{-t}\,dt \sim_{0+} t^{x-1}$. Le critère de Riemann combiné avec l'hypothèse $x > 0$ et le théorème des équivalents donne la convergence de l'intégrale.

Étude de $\displaystyle\int_1^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$. Par croissances comparées, nous avons $t^{x-1}\,e^{-t} = o(1/t^2)$ quand $t \to \infty$. Le critère de Riemann combiné avec le critère de comparaison donne la convergence de l'intégrale.

En combinant les deux études, nous obtenons la convergence de $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dx$. En utilisant la proposition 6.43 a) (ou b)), nous obtenons que

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt = \int_{]0,\infty[} t^{x-1}\,e^{-t}\,d\nu_1(t),\ \forall\, x > 0.$$

b) Nous appliquons le théorème 7.14. Soit

$$f(t,x) := t^{x-1}\,e^{-t},\ \forall\, t \in]0,\infty[,\ \forall\, x \in]0,\infty[.$$

* À x fixé, $t \mapsto t^{x-1}\,e^{-t}$ est continue, donc borélienne.
* À t fixé, $x \mapsto t^{x-1}\,e^{-t}$ est continue.
* Soit $[a,b] \subset]0,\infty[$ un intervalle compact. Nous avons

$$|t^{x-1}\,e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{a-1}\,e^{-t}, & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}\,e^{-t}, & \text{si } t > 1 \end{cases} := g(t),\ \forall\, t \in]0,\infty[,\ \forall\, x \in [a,b].$$

La majorante g est borélienne (exercice 32 c), feuille 2). Nous avons (proposition 6.35 b) et proposition 6.43 a))

$$\int_{]0,\infty[} g\,d\nu_1 = \int_{]0,1]} g\,d\nu_1 + \int_{]1,\infty[} g\,d\nu_1 = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^\infty g(t)\,dt.$$

L'étude de la question a) montre que les deux intégrales généralisées ci-dessus sont finies, et donc g est Lebesgue intégrable.

Ce qui précède et le théorème 7.14 impliquent la continuité de Γ.

c) Nous utilisons le corollaire 7.19.

* À x fixé, $t \mapsto t^{x-1}\,e^{-t}$ est intégrable (ceci suit de l'étude faite au point b)).
* À t fixé, $x \mapsto t^{x-1}\,e^{-t}$ est C^∞.

* Soit $[a,b]\subset]0,\infty[$. Si $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[a,b]$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^k}{dx^k}f(t,x)\right| &= \left|(\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\right|\\ &\le \begin{cases}|\ln t|^k\, t^{a-1}\, e^{-t}, & \text{si } 0<t\le 1\\ (\ln t)^k\, t^{b-1}\, e^{-t}, & \text{si } t>1\end{cases} := h(t),\ \forall\, t\in]0,\infty[,\ \forall\, x\in[a,b].\end{aligned}$$

h est borélienne (voir la question b)) et nous montrons plus bas que h est intégrable. Le corollaire 7.19 donne que $\Gamma\in C^\infty(]0,\infty[)$ et (en utilisant le fait que, de ce qui précède, $t\mapsto \left|\dfrac{d^k}{dx^k}f(t,x)\right|$ est intégrable, et la proposition 6.43 b))

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_{]0,\infty[}(\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, d\nu_1(t)=\int_0^\infty (\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt,\ \forall\, x>0,\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*.$$

Pour établir l'intégrabilité de h, nous raisonnons comme pour la question c), en se ramenant à la finitude des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty (\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$.

Étude de $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Nous avons $|\ln t|^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \sim_{0+} |\ln t|^k\, t^{x-1}$. Le critère de Bertrand combiné avec l'hypothèse $x>0$ et le théorème des équivalents donne la convergence de l'intégrale.

Étude de $\displaystyle\int_1^\infty (\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Par croissances comparées, nous avons $(\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t} = o(1/t^2)$ quand $t\to\infty$. Le critère de Riemann combiné avec le critère de comparaison donne la convergence de l'intégrale.

d) De la question c), nous avons

$$\Gamma''(x)=\int_{]0,\infty[}(\ln t)^2\, t^{x-1}\, e^{-t}\, d\nu_1(t),$$

de sorte que, clairement, $\Gamma''(x)\ge 0,\ \forall\, x>0$. Montrons que $\Gamma''(x)>0,\ \forall\, x>0$ (ce qui permet de conclure). Preuve par l'absurde : sinon, il existe un $x>0$ tel que $\Gamma''(x)=0$. La proposition 6.33 a) implique $(\ln t)^2\, t^{x-1}\, e^{-t}=0$ ν_1-p. p. sur $]0,\infty[$. D'où

$$\nu_1(\{t>0\,;\ (\ln t)^2\, t^{x-1}\, e^{-t}\neq 0\})=0,$$

ou encore $\nu_1(]0,1[\cup]1,\infty[)=0$, contradiction qui achève la preuve. $\square$

Exercice # 14. Pour $x\ge 0$, nous posons $F(x):=\left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\, dt\right)^2$ et $G(x):=\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, dt.$

a) (i) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
   (ii) Calculer $F'(x)+G'(x)$ pour $x\ge 0$.

b) En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)\, dt$.

Solution.

a) (i) Le théorème de Leibniz-Newton donne que l'intégrale qui apparaît dans F est de classe C^1 en x, et donc F l'est également.
   Nous étudions G, qui est une intégrale à paramètre x :

$$G(x)=\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, dt=\int_{[0,1]}\frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, dt$$

par égalité des intégrales de Riemann et Lebesgue pour des fonctions continues sur un intervalle compact.

En notant $f(t,x)$ l'intégrande dans G, nous avons que : $t \mapsto f(t,x)$ est continue, donc borélienne, $x \mapsto f(t,x)$ est continue, et la majoration $|f(t,x)| \leq 1$. Comme 1 est intégrable sur $[0,1]$, nous obtenons la continuité de G.

Par ailleurs, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} f(t,x) = -2x\, \exp(-x^2(1+t^2))$ est continue. Si $x \in [a,b] \subset [0,\infty[$, alors

$$|-2x\, \exp(-x^2(1+t^2))| \leq 2b,$$

et $2b$ est intégrable. Il s'ensuit que $G \in C^1$.

(ii) De ce qui précède et le théorème de Leibniz-Newton, nous avons

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2)\, dt, \\
G'(x) &= -2x \int_0^1 \exp(-x^2(1+t^2))\, dt = -2x \int_{[0,1]} \exp(-x^2(1+t^2))\, dt,
\end{aligned}$$

à nouveau par égalité des intégrales de Lebesgue et Riemann.

Pour $x = 0$, nous avons $F'(0) + G'(0) = 0$. Pour $x > 0$, nous obtenons, par le changement de variable $t = \tau/x$ (dans une intégrale de Riemann) :

$$\begin{aligned}
F'(x) + G'(x) &= 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2)\, dt - 2x \int_0^1 \exp(-x^2(1+t^2))\, dt \\
&= 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2)\, dt - 2x\exp(-x^2) \int_0^1 \exp(-x^2t^2)\, dt \\
&= 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2)\, dt - 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(-\tau^2)\, d\tau = 0.
\end{aligned}$$

b) Par définition de l'intégrale généralisée, nous avons

$$\begin{aligned}
I^2 &= \lim_{x\to\infty} F(x) \overset{(a)}{=} \lim_{x\to\infty} (F(0) + G(0) - G(x)) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt - \lim_{x\to\infty} G(x) \\
&= \Big[\arctan t\Big]_0^1 - \lim_{x\to\infty} G(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to\infty} G(x)\,;
\end{aligned}$$

pour *(a)*, nous utilisons le fait, qui découle de la question précédente, que $x \mapsto F(x) + G(x)$ est constante.

Pour conclure, nous allons montrer que la dernière limite vaut 0; ce qui donne $I^2 = \pi/4$ et donc (comme $I > 0$), $I = \sqrt{\pi}/2$. Une façon de procéder consiste à appliquer le théorème de convergence dominée. Plus simplement, nous avons

$$0 \leq \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} \leq \exp(-x^2),\ \forall\, x \geq 0,\ \forall\, t \in [0,1],$$

et donc

$$0 \leq G(x) \leq \int_0^1 \exp(-x^2)\, dt = \exp(-x^2),$$

d'où la conclusion, par encadrement. $\square$

Exercice # 15. Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

a) Déterminer D_x et D^y, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que D est borélien.

c) Calculer l'aire de D.

d) Calculer $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

Solution.

a) Si $x < 0$, alors $D_x = \emptyset$. Les contraintes $x \geq 0$ et $x + y \leq 1$ impliquent $x \leq 1$, et donc si $x > 1$, alors $D_x = \emptyset$. Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$D_x = \{y\,;\, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\} = [0, 1 - x].$$

De même, $D^y = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } y < 0 \text{ ou } y > 1 \\ [0, 1-y], & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

b) Nous avons $D = f^{-1}([0, \infty[) \cap g^{-1}([0, \infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1])$, où $f(x, y) := x$, $g(x, y) := y$, $h(x, y) := x + y$, $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. f, g, h étant continues, il s'ensuit que D est fermé, donc borélien.

c) Nous devons calculer $\nu_2(D)$. Nous avons $\nu_2 = \nu_1 \otimes \nu_1$, avec ν_1 σ-finie. En utilisant la définition de la mesure produit, nous avons que $x \mapsto \nu_1(D_x)$ est borélienne et positive (et a donc une intégrale de Lebesgue) et

$$\begin{aligned}\nu_2(D) &= \int_{\mathbb{R}} \nu_1(D_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x)\nu_1([0, 1-x])\, dx \overset{(a)}{=} \int_{[0,1]} (1-x)\, dx \overset{(b)}{=} \int_0^1 (1-x)\, dx \\ &= \left[x - x^2/2\right]_{x=1}^{x=1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(a) Nous utilisons les faits que $x \mapsto \nu_1(D_x)$ a une intégrale et que $[0,1]$ est mesurable (car intervalle, donc borélien).
(b) Car l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue sur un intervalle compact coïncide avec son intégrale de Riemann.

d) La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue, donc borélienne, et positive. Elle a donc une intégrale. Par ailleurs, D est borélien. Le théorème de Tonelli appliqué à la mesure $\nu_2 = \nu_1 \otimes \nu_1$ donne que $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_D(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dy$ est borélienne et positive, et

$$\begin{aligned}\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &\overset{(a)}{=} \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D(x, y)\, (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{D_x}(y)\, (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &\overset{(b)}{=} \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1-x]} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \overset{(c)}{=} \int_{[0,1]} \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &= \int_{[0,1]} \left[x^2\, y + y^3/3\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_{[0,1]} (1/3 - x + 2x^2 - 4x^3/3)\, dx \\ &\overset{(d)}{=} \int_0^1 (1/3 - x + 2x^2 - 4x^3/3)\, dx = \left[x/3 - x^2/2 + 2x^3/3 - x^4/3\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Pour *(a)*, nous utilisons la mesurabilité de $[0,1]$ et le fait que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_D(x,y)\, x^2 + y^2)\, dy$ a une intégrale.
Pour *(b)*, nous utilisons le fait que D_x est borélien (car intervalle) et le fait que $y \mapsto x^2 + y^2$ a une intégrale (fonction borélienne positive).
(c) et *(d)* relèvent du fait que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue sur un intervalle compact coïncide avec son intégrale de Riemann. □

Exercice # 16. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy)\, dy \right) dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

Solution. Soit $A :=]0,\infty[\times [0,1]$, qui est un borélien (car produit d'intervalles, donc produit de boréliens). Soit $f(x,y) := e^{-x} \sin(2xy)$, $\forall\, (x,y) \in A$, qui est continue, donc borélienne.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini dans A par rapport à la mesure $\nu_2 = \nu_1 \otimes \nu_1$, il suffit de vérifier que f est intégrable. En utilisant la majoration $|f(x,y)| \le g(x,y) := e^{-x}$, $\forall\, (x,y) \in A$, le fait que g est borélienne (car continue) et le théorème de Tonelli, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_A |f(x,y)|\, dxdy &\overset{(a)}{\le} \int_A g(x,y)\, dxdy \overset{(b)}{=} \int_{]0,\infty[} \left(\int_{[0,1]} e^{-x}\, dy \right) dx = \int_{]0,\infty[} e^{-x}\, dx \\ &\overset{(c)}{=} \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = 1 < \infty,\end{aligned}$$

et donc f est intégrable. Pour *(a)*, nous utilisons le fait que $|f|$ et g sont mesurables positives (donc ont une intégrale); pour *(b)*, le théorème de Tonelli local; pour *(c)* le fait que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue positive sur un intervalle coïncide avec son intégrale généralisée.

Nous avons d'une part, en interprétant l'intégrale en y comme intégrale de Riemann (ou de Lebesgue sur $[0,1]$ – les deux sont égales pour une fonction continue) :

$$I = \int_0^\infty \left[-e^{-x} \frac{\cos(2xy)}{2x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} \frac{1-\cos(2x)}{x}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \ (a).$$

Dans *(a)*, l'intégrale est considérée comme généralisée (elle coïncide avec celle de Lebesgue, l'intégrande étant continue et positive sur l'intervalle d'intégration).

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} I &\overset{(a)}{=} \int_{[0,1]} \left(\int_{]0,\infty[} e^{-x} \sin(2xy)\, dx \right) dy = \frac{1}{2\imath} \int_{[0,1]} \left(\int_{]0,\infty[} e^{-x} \left(e^{2\imath xy} - e^{-2\imath xy} \right) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2\imath} \int_{[0,1]} \left(\int_{]0,\infty[} \left(e^{-(1-2\imath y)x} - e^{-(1+2\imath y)x} \right) dx \right) dy \overset{(b)}{=} \frac{1}{2\imath} \int_{[0,1]} \left(\frac{1}{1-2\imath y} - \frac{1}{1+2\imath y} \right) dy \\ &= \int_{[0,1]} \frac{2y}{1+4y^2}\, dy \overset{(c)}{=} \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\, dy = \frac{1}{4} \left[\ln(1+4y^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 5}{4}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{\ln 5}{4}.$$

L'égalité *(a)* découle du théorème de Fubini local; *(b)* du fait que, si $a \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re} a > 0$, alors l'intégrale (de Lebesgue ou généralisée) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\, dx$ existe et vaut $\dfrac{1}{a}$; *(c)* découle de l'égalité de l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann pour une fonction continue sur un intervalle compact. □

Exercice # 17. Soit $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2+z^2 < 1\}$. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ avons-nous I finie, où

$$I := \int_B |x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}\,dxdydz\,?$$

Obtenir la réponse

a) Par utilisation du théorème de Tonelli.

b) En utilisant les coordonnées sphériques.

Solution.

a) L'intégrande $f(x,y,z) = |x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}$ est continue sur $B \setminus \{0\}$, donc borélienne, et positive. Par ailleurs, B est un borélien. Il s'ensuit que I existe. En utilisant la positivité de f et l'inclusion de boréliens $]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[^3 \subset B \subset]-1,1[^3$, nous obtenons que $J \le I \le K$, où

$$J := \int_{]-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}[^3} |x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}\,dxdydz,\ K := \int_{]-1,1[^3} |x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}\,dxdydz.$$

Le théorème de Tonelli local appliqué à ν_3 et f sur $]-1,1[^3$ donne

$$\begin{aligned}K &= \int_{]-1,1[} |x|^{a-1}\,dx \int_{]-1,1[} |y|^{b-1}\,dy \int_{]-1,1[} |z|^{c-1}\,dz\\ &\overset{(a)}{=} \int_{-1}^{1} |x|^{a-1}\,dx \int_{-1}^{1} |y|^{b-1}\,dy \int_{-1}^{1} |z|^{c-1}\,dz \overset{(b)}{=} 8 \int_0^1 |x|^{a-1}\,dx \int_0^1 |y|^{b-1}\,dy \int_0^1 |z|^{c-1}\,dz.\end{aligned}$$

Ici, *(a)* découle de l'égalité de l'intégrale de Lebesgue et de l'intégrale généralisée pour des fonctions continues positives sur un intervalle, et *(b)* de la parité des intégrandes.
Le critère de Riemann donne : K est finie si et seulement si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. De même pour J. En utilisant l'inégalité $J \le I \le K$, nous obtenons

$$I \text{ finie} \implies J \text{ finie} \implies a > 0, b > 0, c > 0 \implies K \text{ finie} \implies I \text{ finie}$$

et donc I est finie si et seulement $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

b) En utilisant les coordonnées sphériques, et en notant que $(x,y,z) \in B \iff r \in [0,1[$, nous obtenons

$$\begin{aligned}I &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_B(x,y,z)\,|x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}\,dxdydz\\ &= \int_{[0,\infty]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} \chi_{[0,1[}(r)\,r^{a+b+c-1}\,(\cos\varphi)^{a+b-1}|\sin\varphi|^{c-1}\,|\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\,drd\varphi d\theta\\ &\overset{(a)}{=} \int_{[0,1[\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} r^{a+b+c-1}\,(\cos\varphi)^{a+b-1}|\sin\varphi|^{c-1}\,|\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\,drd\varphi d\theta\\ &\overset{(b)}{=} \int_{[0,1[} r^{a+b+c-1}\,dr \int_{[-\pi/2,\pi/2]} |(\cos\varphi)^{a+b-1}|\sin\varphi|^{c-1}\,d\varphi \int_{[0,2\pi]} \cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\,d\theta\\ &\overset{(c)}{=} \int_{]0,1[} r^{a+b+c-1}\,dr \int_{]-\pi/2,\pi/2[} (\cos\varphi)^{a+b-1}|\sin\varphi|^{c-1}\,d\varphi \int_{]0,2\pi[} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\,d\theta\\ &\overset{(d)}{=} \int_0^1 r^{a+b+c-1}\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi)^{a+b-1}|\sin\varphi|^{c-1}\,d\varphi \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\,d\theta.\end{aligned}$$

Ici, *(a)* découle de la définition de l'intégrale sur un ensemble mesurable, *(b)* du théorème de Tonelli local pour la mesure $\nu_3 = \nu_1 \otimes \nu_1 \otimes \nu_1$, *(c)* du fait que les points sont Lebesgue négligeables dans $\mathbb{R}$, *(d)*

de l'égalité de l'intégrale de Lebesgue et de l'intégrale généralisée pour des fonctions continues sauf en un nombre fini de points et positives sur un intervalle. (Il convient de comprendre la dernière intégrale comme la somme d'intégrales généralisées de fonctions continues positives sur $]0, \pi/2[$, $]\pi/2, \pi[$, $]\pi, 3\pi/2[$, $]3\pi/2, 2\pi[$.)
Notons que les trois intégrales généralisées de la dernière ligne sont strictement positives, car intégrales généralisées de fonctions continues et strictement positives, sauf en un nombre fini de points. Il s'ensuit que I est finie si et seulement si chacune de ces intégrales l'est.

Nous avons $\displaystyle\int_0^1 r^{a+b+c-1}\, dr < \infty \iff a+b+c > 0$ (critère de Riemann).
Par ailleurs,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi)^{a+b-1} |\sin\varphi|^{c-1}\, d\varphi \overset{(a)}{=} 2\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{a+b-1} (\sin\varphi)^{c-1}\, d\varphi\,;$$

(a) découle de la parité de l'intégrande.
Comme $(\cos\varphi)^{a+b-1}(\sin\varphi)^{c-1} \sim_{0+} \varphi^{c-1}$, le théorème des équivalents et le critère de Riemann donne que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos\varphi)^{a+b-1}(\sin\varphi)^{c-1}\, d\varphi$ converge si et seulement si $c > 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\varphi)^{a+b-1}(\sin\varphi)^{c-1}\, d\varphi &\overset{(a)}{=} \int_0^{\pi/4} (\cos(\pi/2-t))^{a+b-1}(\sin(\pi/2-t))^{c-1}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/4} (\sin t)^{a+b-1}(\cos t)^{c-1}\, dt,\end{aligned}$$

et donc, comme ci-dessus, cette intégrale est finie si et seulement si $a+b > 0$. (Pour obtenir *(a)*, nous utilisons le changement de variables (dans une intégrale généralisée) $\varphi = \pi/2 - t$.)
Il s'ensuit que la deuxième intégrale généralisée converge si et seulement si $c > 0$ et $a+b > 0$.
Enfin, en utilisant la 2π-périodicité et la positivité de l'intégrande, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta \\ &\overset{(a)}{=} 2\int_0^{\pi} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta + 2\int_{\pi/2}^{\pi} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta \\ &\overset{(b)}{=} 2\int_0^{\pi/2} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta \\ &\quad + 2\int_0^{\pi/2} |\cos(\pi-t)|^{a-1}\,|\sin(\pi-t)|^{b-1}\, dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} |\cos\theta|^{a-1}\,|\sin\theta|^{b-1}\, d\theta + 2\int_0^{\pi/2} |\cos t|^{a-1}\,|\sin t|^{b-1}\, dt,\end{aligned}$$

et donc, d'après l'étude de l'intégrale précédente, la troisième intégrale généralisée est finie si et seulement si $b > 0$ et $a > 0$. (Pour *(a)*, nous utilisons la parité et, pour *(b)*, nous faisons le changement de variables $\theta = \pi - t$.)
Finalement, I est finie si et seulement si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. □

Exercice # 18. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - 1/x)\, dx.$$

Solution. Il suffit de montrer l'égalité pour des fonctions Lebesgue mesurables et positives, puis de retrancher les égalités obtenues pour f_+ et f_-. Soient $\Psi_1 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $\Psi_2 :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $\Psi_1(x) := x - 1/x$, $\forall\, x < 0$, $\Psi_2(x) := x - 1/x$, $\forall\, x > 0$. Les tableaux de variations de ces fonctions montrent qu'elles sont bijectives. Par ailleurs, elles sont de classe C^1 et de dérivée > 0, donc des C^1-difféomorphismes.

Posons $\Phi_j := \Psi_j^{-1}$, $j = 1, 2$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $x - 1/x = y$ a exactement deux solutions, une négative, $x_1 := \Phi_1(y)$, l'autre positive, $x_2 := \Phi_2(y)$. En résolvant l'équation, nous trouvons $x_1 = \dfrac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}$, $x_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$.

Montrons d'abord que $x \mapsto g(x) := f(x - 1/x)$ (qui n'est pas définie en 0) est Lebesgue mesurable. Il suffit de montrer qu'elle l'est sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$ (pour conclure, nous la considérons comme une fonction « à accolade » définie presque partout). Le théorème du changement de variables donne que g est mesurable sur $]-\infty, 0[$ si et seulement si $g \circ \Phi_1 |\Phi_1'|$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}$. Or,

$$y \mapsto g \circ \Phi_1(y) |\Phi_1'(y)| = f(y) \left| \frac{1 - y/\sqrt{y^2 + 4}}{2} \right|$$

est Lebesgue mesurable, comme produit d'une fonction Lebesgue mesurable et d'une fonction continue.

De même, $g \circ \Phi_2 |\Phi_2'|$ est Lebesgue mesurable, donc g l'est sur $]0, \infty[$.

En utilisant les faits que g est Lebesgue mesurable et positive, que $\{0\}$ est Lebesgue négligeable et que $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ sont boréliens (donc Lebesgue mesurables), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x - 1/x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(x - 1/x)\, dx = \int_{-\infty,0[\sqcup]0,\infty[} f(x - 1/x)\, dx \\
&= \int_{]-\infty,0[} f(x - 1/x)\, dx + \int_{]0,\infty[} f(x - 1/x)\, dx \\
&\overset{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y) |\Phi_1'(y)|\, dy + \int_{\mathbb{R}} f(y) |\Phi_2'(y)|\, dy \\
&\overset{(b)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y) [|\Phi_1'(y)| + |\Phi_2'(y)|]\, dy \overset{(c)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Ici, *(a)* découle du théorème du changement de variables, *(b)* du fait que les intégrandes sont positives, et *(c)* du fait que, par calcul direct, en utilisant le fait que Φ_j est croissante, $j = 1, 2$, nous avons

$$|\Phi_1'(y)| + |\Phi_2'(y)| = \Phi_1'(y) + \Phi_2'(y) = \frac{1 - y/\sqrt{y^2 + 4}}{2} + \frac{1 + y/\sqrt{y^2 + 4}}{2} = 1. \qquad \square$$

Exercice # 19. *(Inégalité de Hardy)* Nous travaillons dans $I :=]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(I)$, nous posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall\, x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\, dx. \tag{15}$$

b) Montrer que l'inégalité (15) reste vraie pour tout $f \in L^p$.

Solution.

a) Soit $f \in C_c^\infty(]0, \infty[)$. Dans ce cas, les intégrandes de (15) sont continues et positives, et donc nous pouvons traiter les intégrales soit comme des intégrales de Lebesgue soit, ce que nous ferons, comme des intégrales généralisées.

Soient $0 < a < b < \infty$ tels que $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$. Alors $F(x) = 0$ si $x \leq a$ et $F(x) = F(b)$ si $x \geq b$. Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx = \int_a^b \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx + \int_b^\infty \frac{|F(b)|^p}{x^p}\,dx < \infty,$$

car la première intégrale est une intégrale de Riemann finie, et la seconde est finie par critère de Riemann.

En utilisant la définition de l'intégrale généralisée et en intégrant par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx &= \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \\
&\overset{(a)}{=} \lim_{M\to\infty} \left\{ \left[-\frac{|F(x)|^p}{(p-1)x^{p-1}} \right]_a^M \right. \\
&\qquad \left. + \frac{p}{p-1} \int_a^M \frac{|F(x)|^{p-1} f(x)\ \mathrm{sgn}\,(F(x))}{x^{p-1}}\,dx \right\} \qquad (16) \\
&= \lim_{M\to\infty} \left\{ -\frac{|F(b)|^p}{(p-1)M^{p-1}} + \frac{p}{p-1} \int_a^M \frac{|F(x)|^{p-1} f(x)\ \mathrm{sgn}\,(F(x))}{x^{p-1}}\,dx \right\} \\
&= \frac{p}{p-1} \lim_{M\to\infty} \int_a^M \frac{|F(x)|^{p-1} f(x)\ \mathrm{sgn}\,(F(x))}{x^{p-1}}\,dx.
\end{aligned}$$

Dans *(a)*, nous utilisons le théorème de Leibniz-Newton, la règle de la chaîne et le fait que la dérivée de $t \mapsto |t|^p$ est $t \mapsto p\,|t|^{p-1}\ \mathrm{sgn}\,t$.

Pour majorer la dernière intégrale de (16), nous utilisons l'inégalité de Hölder avec exposants p et $q = p/(p-1)$. Nous trouvons, pour $M > a$:

$$\begin{aligned}
\int_a^M \frac{|F(x)|^{p-1} f(x)\ \mathrm{sgn}\,(F(x))}{x^{p-1}}\,dx &\leq \int_a^M \frac{|F(x)|^{p-1}|f(x)|}{x^{p-1}}\,dx \\
&\overset{(a)}{=} \int_{[a,M]} \frac{|F(x)|^{p-1}|f(x)|}{x^{p-1}}\,dx \\
&\overset{(b)}{\leq} \left(\int_{[a,M]} |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_{[a,M]} \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \right)^{(p-1)/p} \qquad (17) \\
&\overset{(c)}{=} \left(\int_a^M |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_a^M \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \right)^{(p-1)/p} \\
&\overset{(d)}{\leq} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Ici, *(a)* et *(c)* suivent de l'égalité des intégrales de Riemann et Lebesgue pour des intégrandes continues sur un intervalle compact, *(d)* de la monotonie de l'intégrale définie d'une fonction continue positive, et *(b)* de l'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions continues (donc boréliennes) $|f|$ et $x \mapsto \dfrac{|F(x)|^{p-1}}{x^{p-1}}$.

En combinant (16) et (17), nous obtenons

$$\left(\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \right)^p \leq \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx \right) \left(\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \right)^{p-1}. \qquad (18)$$

Nous savons, d'après la première partie de la preuve, que $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx$ est finie. En combinant ce fait avec (18), nous obtenons (en considérant les cas $I = 0$ et $I \neq 0$)(15).

b) Soit $f \in \mathscr{L}^p$. Alors l'intégrande qui donne $F(x)$ est intégrable et F est continue (propriétés vues ailleurs ; elles suivent de l'inégalité de Hölder).

Soit $(f_j)_j \subset C_c^\infty(I)$ telle que $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$. Soit $F_j(x) := \displaystyle\int_0^x f_j(t)\,dt$, $\forall\, j, \forall\, x > 0$. Par l'inégalité de Hölder avec exposants p et $q = p/(p-1)$, nous avons

$$\begin{aligned}|F_j(x) - F(x)| &\overset{(a)}{=} \left|\int_{]0,x[} (f_j(t) - f(t))\,dt\right| \overset{(b)}{\le} \int_{]0,x[} |f_j(t) - f(t)|\,dt \\ &\le \left(\int_{]0,x[} |f_j(t) - f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_{]0,x[} 1\,dt\right)^{(p-1)/p} \overset{(c)}{\le} x^{(p-1)/p}\|f_j - f\|_{L^p(I)}.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé : pour *(a)* et *(b)*, le fait que les intégrandes définissant $F_j(x)$ et $F(x)$ sont finies ; pour *(c)*, la monotonie de l'intégrale d'une fonction mesurable positive par rapport au domaine d'intégration.

Il s'ensuit que $F(x) = \lim_{j\to\infty} F_j(x)$, $\forall\, x > 0$. En combinant ce fait avec le lemme de Fatou et la première partie de la preuve, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx &\overset{(a)}{=} \int_{]0,\infty[} \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx = \int_{]0,\infty[} \lim_{j\to\infty} \frac{|F_j(x)|^p}{x^p}\,dx = \int_{]0,\infty[} \liminf_{j\to\infty} \frac{|F_j(x)|^p}{x^p}\,dx \\ &\overset{(b)}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_{]0,\infty[} \frac{|F_j(x)|^p}{x^p}\,dx \overset{(c)}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_{]0,\infty[} |f_j(x)|^p\,dx \overset{(d)}{=} \int_{]0,\infty[} |f(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

Ici, *(a)* utilise le fait que l'intégrande est continue et positive, *(b)* découle du lemme de Fatou appliqué aux fonctions $x \mapsto \dfrac{|F_j(x)|^p}{x^p}$, qui sont continues (donc boréliennes) et positives, *(c)* de la première partie de la preuve, et *(d)* du fait que la norme est continue dans un espace normé.

Ceci donne (15) pour tout $f \in \mathscr{L}^p$, sachant qu'il faut comprendre la deuxième intégrale dans (15) comme une intégrale de Lebesgue. $\square$