Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Exercices de synthèse et avancés

Exercice # 1. (Combien de points y a-t-il dans $[0,1[$?) Si $x \in [0,1[$, soit $x = 0,a_1a_2\ldots$ son écriture en base 2. Soit

$$f : [0,1[\to \mathscr{P}(\mathbb{N}^*),\ f(x) := \{n \in \mathbb{N}^*\,;\, a_n = 0\}.$$

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que

$$\mathscr{P}(\mathbb{N}^*) \setminus f([0,1[) = \mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*) := \{A \subset \mathbb{N}^*\,;\, A \text{ est finie}\}.$$

c) Montrer que $\mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*)$ est dénombrable. Il existe donc une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*)$.

d) Donner un exemple de fonction injective $\Psi : \mathbb{N} \to [0,1[$.

e) Soit

$$F : [0,1[\to \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin \Psi(\mathbb{N}) \\ f(\Psi(n)), & \text{si } x = \Psi(2n) \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ \Phi(n), & \text{si } x = \Psi(2n+1) \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que F est bijective. Il y a donc « autant » de points dans $[0,1[$ que de parties de $\mathbb{N}^*$.

Exercice # 2. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n$.
2. Pour tout $x \in X$: soit $\exists\, n_0$ (dépendant de x) tel que $x \in A_n$, $\forall\, n \geq n_0$, soit $\exists\, n_0$ (dépendant de x) tel que $x \notin A_n$, $\forall\, n \geq n_0$.

Exercice # 3. (Exemple d'ensemble non borélien) Définissons, pour $x, y \in [0,1]$, la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
Nous pouvons donc écrire $[0,1]$ comme l'union des classes d'équivalence, qui sont deux à deux disjointes : $[0,1] = \cup_{i\in I} C_i$.
Prenons, pour chaque i, un élément et un seul $x_i \in C_i$ et définissons $A := \{x_i\,;\, i \in I\}$.
Posons $A_q := \{q\} + A$, $\forall\, q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

b) Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.

c) Montrer que $[0,1] \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.

d) En supposant A borélien, calculer $\nu_1(A_q)$ en fonction de $\nu_1(A)$.

e) En déduire que $1 \leq \infty \cdot \nu_1(A) \leq 3$.

f) Conclusion : A n'est pas borélien.

g) Renforcer la conclusion à : A n'est pas Lebesgue mesurable.

h) (On ne peut pas bien mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$) Si $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ est une mesure invariante par translations, alors soit $\mu = 0$, soit $\mu(I) = \infty$ pour tout intervalle non dégénéré $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice # 4. (Caractérisation des tribus sur les ensembles a. p. d.) Rappelons, pour commencer, quelques propriétés des relations d'équivalence.

1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Soient $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence relatives à $\mathscr{R}$. Alors ces classes forment une *partition* de X.
2. Réciproquement, si $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ est une partition de X, et si nous définissons la relation

   $x \sim y$ si et seulement si il existe un $i \in I$ tel que $x, y \in \mathscr{X}_i$,

   alors $\sim$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont précisément $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$.

Montrer les résultats suivants.

a) Si $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ est une partition a. p. d. de X et si nous posons $\mathscr{A} := \{\mathscr{X}_i\,;\, i \in I\}$, alors

$$\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \{\cup_{J\subset I}\mathscr{X}_i\,;\, J \subset I\}.$$

b) Si, dans la question précédente, I est finie, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

c) Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X. Définissons une relation, de manière négative, par :

$x \not\sim y$ si et seulement si $\exists\, A \in \mathscr{T}$ tel que $x \in A$ et $y \notin A$.

  (i) Écrire la condition $x \sim y$.

  (ii) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

  (iii) Supposons X a. p. d. Notons $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence de $\sim$. Montrer que

$$\mathscr{T} = \{\cup_{J\subset I}\mathscr{X}_i\,;\, J \subset I\}.$$

d) Comment obtient-on *toutes* les tribus sur un ensemble a. p. d. ?

Exercice # 5. Montrer que λ_1, la mesure de Lebesgue (complète) sur $\mathbb{R}$, est donnée par la formule

$$\lambda_1(A) = \inf\left\{\sum(b_j - a_j)\,;\, A \subset \cup]a_j, b_j[\right\},\ \forall\, A \in \mathscr{L}_1.$$

Exercice # 6. (Ensemble *maigre* de Cantor) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$, avec la tribu borélienne $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ et la mesure de Lebesgue ν_1.

a) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors nous notons $\widetilde{I}$ l'union des deux intervalles obtenus en enlevant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I. Exemple : si $I := [-3, 3]$ (de centre 0), alors l'intervalle ouvert qui est enlevé est $]-1, 1[$, et donc $\widetilde{I} = [-3, -1] \cup [1, 3]$.
De manière équivalente, si $I := [a, b]$ alors $\widetilde{I} := [a, a + (b - a)/3] \sqcup [a + 2(b - a)/3, b]$.
Montrer que $\widetilde{I}$ est un borélien, et calculer $\nu_1(\widetilde{I})$ en fonction de $\nu_1(I)$.

b) Nous construisons par récurrence une suite $(C_j)_{j\geq 0}$ décroissante d'ensembles de la manière suivante :

  (i) $C_0 = [0, 1]$

  (ii) Si C_j s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés d. d. d. : $C_j = \sqcup_{\ell=1}^m I_\ell$, alors C_{j+1} est défini comme $C_{j+1} := \sqcup_{\ell=1}^m \widetilde{I}_\ell$.

c) Dessiner C_0, C_1, C_2.

d) Montrer que C_j est un borélien, $\forall\, j$.

e) Calculer $\nu_1(C_j)$, $j = 0, 1, 2$.

f) Proposer et montrer une formule pour $\nu_1(C_j)$.

g) Posons $C := \cap_{j\geq 0} C_j$. Montrer que C est un compact non vide infini.

h) Calculer $\nu_1(C)$.

i) En examinant l'écriture en base 3 des points de chaque C_j, puis de C, montrer qu'il y a « autant » de points dans C que dans $[0,1]$. Plus précisément, en utilisant les bases 3 et 2, déterminer une surjection entre C et $[0,1]$. Puis, conclure en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice # 7. (Théorème d'Egoroff) [†] Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ *finie*. Soient $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que $f_n \to f$ (convergence simple). Le théorème d'Egoroff affirme que $f_n \to f$ « presque uniformément », au sens suivant :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C \in \mathscr{T} \text{ tel que } \mu(C) < \varepsilon \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } X \setminus C. \tag{1}$$

(La convergence uniforme reviendrait à $C = \emptyset$.)

Prouver ce résultat comme suit.

Soit $(N_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$. Posons

$$A_{k,N_k} := \left\{ x \in X\,;\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},\ \forall\, n \geq N_k \right\},$$
$$B := \bigcap_{k\geq 1} A_{k,N(k)}.$$

(L'ensemble B dépend à la fois de la suite $(f_n)_n$ et de la suite $(N_k)_k$.)

a) Montrer que $A_{k,N_k}, B \in \mathscr{T}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur B.

c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que $\mu(X \setminus A_{k,N_k}) < \varepsilon/2^k$.

d) Pour N_k comme dans la question précédente, montrer que $\mu(X \setminus B) < \varepsilon$. Conclure.

Exercice # 8. (Une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}$ est « proche » d'une union finie d'intervalles)

a) Soit $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ un ensemble borné. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des intervalles ouverts et d. d. d. $I_1, \ldots, I_k$ tels que $U := \sqcup I_j$ soit « proche » de B, au sens suivant :

$$\lambda_1(B \setminus U) < \varepsilon \text{ et } \lambda_1(U \setminus B) < \varepsilon. \tag{2}$$

b) Même conclusion si $B \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ est de mesure finie.

c) Une propriété similaire est vraie pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (avec des pavés de $\mathbb{R}^n$ à la place des intervalles). Essayer de montrer ce résultat en utilisant les ingrédients suivants : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon, et le lemme 9.6 du support de cours.

Exercice # 9. (Théorème de Louzine [‡]) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable. Le théorème de Louzine affirme que f est « presque continue », au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction *continue* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un ensemble borélien $B \subset [0,1]$ tels que $\nu_1(B) < \varepsilon$ et $f = g$ sur $[0,1] \setminus B$.

Nous nous proposons d'établir une forme plus faible de ce résultat, prouvée par Vitali : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble borélien $B \subset [0,1]$ tel que $\nu_1(B) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $[0,1] \setminus B$ soit continue.

Le passage du résultat de Vitali à celui de Luzin nécessite un résultat de topologie, dû à Urîsohn, que nous ne donnerons pas ici. Un cas particulier de ce résultat nous sera utile pour la question a) : si F, G sont des *fermés non vides* et *disjoints* dans un espace métrique X, alors la fonction

$$X \ni x \mapsto \frac{\operatorname{dist}(x,G)}{\operatorname{dist}(x,f) + \operatorname{dist}(x,G)}$$

est continue sur X, vaut 1 sur F et 0 sur G.

†. Ou Egorov.
‡. Ou Lusin.

a) Montrer le théorème de Louzine si f est la fonction caractéristique d'un ensemble Lebesgue mesurable A. Indication : « encadrer » A grâce à un fermé et un ouvert.

b) Montrer le théorème de Louzine pour une fonction étagée.

c) En utilisant les questions précédentes et le théorème d'Egoroff, montrer le théorème de Vitali.

Exercice # 10. (Lemme de Brezis-Lieb) *Préliminaire.* Un cas particulier du lemme de Fatou est le suivant. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f_n \geq 0$ est mesurable, $\forall\, n$, et $f_n \to f$, alors $\displaystyle\int f \leq \liminf_n \int f_n$. Le lemme de Brezis-Lieb, qui s'applique à des situations plus générales, permet, dans ce cas particulier, de « mesurer » l'écart entre $\displaystyle\int f$ et $\displaystyle\liminf_n \int f_n$.

Dans ce qui suit, les fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ sont supposées mesurables, avec $(X, \mathscr{T}, \mu)$ mesuré.

a) Supposons $f_n \to f$ et f intégrable. Montrer que

$$\int |f_n| = \int |f| + \int |f_n - f| + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$

On pourra commencer par établir l'inégalité

$$-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$$

et utiliser le théorème de convergence dominée.

b) De même si μ est complète et la convergence $f_n \to f$ est p. p.

c) En déduire le corollaire suivant : si u_n, u sont des fonctions mesurables positives telles que $u_n \to u$ p. p., et si $\displaystyle\int u_n \to \int u < \infty$, alors $\displaystyle\int |u_n - u| \to 0$.

d) (Attention, hypothèse inhabituelle concernant p) Soit $0 < p < 1$. En reprenant la preuve de a), montrer le résultat suivant. Si $f_n \to f$ et $\displaystyle\int |f|^p < \infty$, alors

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{3}$$

NB. Pour $1 < p < \infty$, nous avons encore (3), sous les hypothèses $\displaystyle\int |f_n|^p \leq C < \infty, \forall\, n$, et $f_n \to f$. La preuve est plus complexe que dans le cas $0 < p \leq 1$ (voir Lieb et Loss, Analysis, Theorem 1.9, p. 21).

Exercice # 11. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice # 12. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $0 < \mu(X) < \infty$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable, montrer qu'il existe $x_0, y_0 \in X$ tels que

$$f(x_0) \geq \frac{\displaystyle\int_X f\, d\mu}{\mu(X)} := \fint f,$$

$$f(y_0) \leq \frac{\displaystyle\int_X f\, d\mu}{\mu(X)} = \fint f.$$

Exercice # 13. Dans ce qui suit, $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes. Le problème que nous étudions est le suivant : montrer qu'il existe $J \subset [\![1, \ldots, n]\!]$ tel que la somme

$$S_J := \left|\sum_{j\in J} z_j\right|$$

soit « grande ». Précisons d'abord le problème. Nous avons

$$S_J \leq \sum_{j\in J} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| := S,$$

et donc S_J ne peut pas dépasser S. Nous nous proposons de montrer qu'il existe J tel que « S_J soit une partie significative de S ».

Clairement, pour $n = 1$ le meilleur choix est de prendre $J := \{1\}$, et dans ce cas $S_1 = S = |z_1|$. Étudions le cas $n \geq 2$.

a) Si $n = 2$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} |z_j|,$$

et que la constante $\dfrac{1}{2}$ est la meilleure possible.

b) Si $n = 3$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} |z_j|,$$

et que la constante $\dfrac{1}{3}$ est la meilleure possible.

c) (Je ne connais pas la réponse) Quelle est la meilleure constante si $n = 4$?

En tout cas, elle n'est pas $\dfrac{1}{4}$. En effet, nous allons montrer le résultat suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \exists\, J \subset [\![1, n]\!] \text{ tel que } S_J \geq \frac{1}{\pi}S. \tag{4}$$

Dans ce qui suit, le produit scalaire des nombres complexes $\langle\ ,\ \rangle$ est le *produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^2$.

d) Soit $\omega = e^{\imath t}$ un nombre complexe de module 1. Posons

$$J_t := \{j \in [\![1, n]\!]\,;\ \langle z_j, \omega\rangle \geq 0\}.$$

(Donc J_t contient les j tels que l'angle entre z_j et ω soit $\leq \pi/2$.)

Montrer que

$$\left|\sum_{j\in J_t} z_j\right| \geq \sum_{j\in J_t}\langle z_j, \omega\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle z_j, \omega\rangle_+. \tag{5}$$

Rappelons que x_+ est la partie positive de x : $x_+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \, dt$$

et obtenir (4) grâce à (5) et à l'exercice précédent.

Exercice # 14. Obtenir, à partir de l'inégalité de Jensen, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^n (a_j)^2 \sum_{j=1}^n (b_j)^2 \geq \left(\sum_{j=1}^n a_j \, b_j \right)^2, \ \forall \, n \in \mathbb{N}^*, \ \forall \, a_1, \dots a_n, \ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}.$$

On pourra commencer par le cas où $b_j > 0, \forall \, j$.

Exercice # 15. (Lemme de Lebesgue) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathscr{T}$ une suite telle que $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\chi_{A_n} \to 0$ μ-p. p.

b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer le *lemme de Lebesgue* :

$$\forall \, \varepsilon > 0, \ \exists \, \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0 \text{ tel que } [A \in \mathscr{T}, \ \mu(A) \leq \delta] \implies \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Voici une autre approche pour montrer ce lemme.

c) Montrer le résultat lorsque f est étagée, en prenant $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\max |f|}$.

d) Soit f intégrable.

  (i) Montrer qu'il existe g étagée positive telle que $g \leq |f|$ et $\displaystyle\int g > \int |f| - \varepsilon/2$.

  (ii) Montrer que nous pouvons prendre $\delta(\varepsilon, f) := \delta(\varepsilon/2, g)$.

Exercice # 16. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions μ-intégrables qui convergent vers 0 μ-p. p. Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int f_n = \int \sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Exercice # 17. Nous nous plaçons dans le cadre du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre(s) (théorème 7.18). Supposons que Λ est connexe. Montrer que nous pouvons, dans les hypothèses du théorème, remplacer l'hypothèse (i) par l'hypothèse plus faible
(i') pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable, et il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $f(\cdot, \lambda_0)$ soit intégrable.

Exercice # 18. (Unicité des mesures *à la* Lebesgue)
I. Soit (X, d) un espace métrique tel que

$$\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{X \times X} \tag{6}$$

(nous verrons en partie II de l'exercice une condition *suffisante* pour la validité de (6)).

Exemple : $X = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des métriques induites par une norme $\| \ \|$.

Une mesure borélienne μ sur X est *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \, x, y \in X, \forall \, r > 0, \ 0 < \mu(B(x,r)) = \mu(B(y,r)) < \infty.$$

Le but de cet exercice est de montrer que deux mesures uniformément réparties sont proportionnelles.

En admettant cette conclusion, nous obtenons une autre caractérisation de la mesure de Lebesgue (voir l'item i) ci-dessous).

Soient μ et ν deux mesures uniformément réparties. Soient $g(r) := \mu(B(x,r))$, $h(r) := \nu(B(x,r))$, $\forall\, r > 0$ (ces fonctions dépendent de r, mais pas de $x \in X$).

Dans ce qui suit, U désigne un ouvert non vide et borné de X.

a) Montrer que μ et ν sont σ-finies.

b) Montrer que $0 < \mu(U) < \infty$ et $0 < \nu(U) < \infty$.

c) Montrer que $V := \{(x,y)\,;\, x,\, y \in U,\, d(x,y) < r\}$ est un borélien de $X \times X$.

d) Montrer que

$$U \ni x \mapsto \nu(U \cap B(x,r))$$

est borélienne.

e) Montrer que

$$\int_U \nu(U \cap B(x,r))\, d\mu(x) = \int_U \mu(U \cap B(y,r))\, d\nu(y).$$

(On pourra calculer $\mu \otimes \nu(V)$.)

f) Montrer que

$$\mu(U) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U \left(\nu(U \cap B(x,r))\right)\, d\mu(x),$$
$$\nu(U) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{g(r)} \int_U \left(\mu(U \cap B(y,r))\right)\, d\nu(y).$$

g) En déduire qu'il existe un réel $0 < C < \infty$ (indépendant de U) tel que $\mu(U) = C\,\nu(U)$.

h) Conclure.

i) Soit d la distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence suivante :
   (i) μ est uniformément répartie sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
   (ii) Il existe $0 < C < \infty$ telle que $\mu = C\,\nu_n$.

II. Nous donnons ici une condition *suffisante* pour la validité de (6), condition qui est satisfaite en particulier par $\mathbb{R}^n$ avec l'une de ses métriques usuelles.

Voici une question d'échauffement.

a) Montrer que, si (X,d) et (Y,δ) sont des espaces métriques *arbitraires*, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X\times Y}$. (Penser à la preuve de l'inclusion $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.)
   Donc si une inclusion pose problème dans la vérification de (6), il s'agit de $\mathscr{B}_{X\times Y} \subset \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$. *En général, cette inclusion est fausse,* mais donner un contre-exemple dépasse le cadre de cet exercice.

Un espace métrique (X,d) est *séparable* s'il existe un ensemble a. p. d. $A \subset X$ dense dans X, donc tel que $\overline{A} = X$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est séparable.

c) Si X est séparable, montrer que pour tout ouvert U nous avons

$$U = \bigcup_{\substack{a \in A,\, r \in \mathbb{Q} \\ B(a,r) \subset U}} B(a,r).$$

d) Si (X,d) et (Y,δ) sont séparables, montrer que $X \times Y$ est séparable.

e) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que les ouverts de $X \times Y$ appartiennent à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$.

f) En déduire que, si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_{X\times Y}$.
Cas particulier : $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Exercice # 19. (Changement de variables) Soient $f, g :]0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} f\left(\frac{x}{y}\right) g(xy)\, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \int_0^\infty g(x)\, dx.$$

Exercice # 20. (Difféomorphisme qui préserve la mesure) Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un C^1-difféomorphisme. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. Φ *préserve la mesure*, au sens suivant :
$$\nu_n(\Phi(U)) = \nu_n(U),\ \forall\, U \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert.}$$
2. $[J_\Phi(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n]$ ou $[J_\Phi(x) = -1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n]$.

Exercice # 21. (Mesure superficielle) Si $S \subset \mathbb{R}^3$, nous définissons la *mesure superficielle* (aire) $\mathscr{A}(S)$ de S par

$$\mathscr{A}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}\, \nu_3(\{x \in \mathbb{R}^3\,;\, \operatorname{dist}(x, S) \le \varepsilon\})$$

(si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3\,;\, \operatorname{dist}(x, S) \le \varepsilon\}$ est borélien pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et si la limite existe). Calculer $\mathscr{A}(S)$ si :

a) S est une sphère.

b) S est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$).

Exercice # 22. (Mesurabilité) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable. Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x - y)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (avec $y \in \mathbb{R}^n$ fixé), $h(x, y) := f(x - y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) Peut-on invoquer un résultat théorique et en déduire que g et h sont Lebesgue mesurables ?

b) Que peut-on dire de g et h si f est borélienne ?

c) Montrer que g et h sont Lebesgue mesurables.

Exercice # 23. (Intégration par parties (I)) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \nu_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

a) Soit $g \in C(\mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(R_j)_j \subset [0, \infty[$ telle que $R_j \to \infty$, $g(R_j) \to 0$ et $g(-R_j) \to 0$.

b) Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$, avec h et h' intégrables.

(i) Montrer que $\displaystyle\int_\mathbb{R} h' = 0$.

(ii) Montrer que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\mathbb{R} e^{-\imath x\eta} h'(x)\, dx = \imath\eta \int_\mathbb{R} e^{-\imath x\eta} h(x)\, dx$.

c) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, avec f et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ intégrables. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

d) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $0 < M < \infty$. Proposer et montrer une formule de la forme

$$\int_{[-M,M]^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = \int_{[-M,M]^{n-1}} h(x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n) - \int_{[-M,M]^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

e) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ bornées telles que $f, g, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ soient intégrables. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

Exercice # 24. (Intégration par parties (II)) Nous travaillons dans $([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$. Soient $F(x) := \int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $G(x) := \int_{[0,x]} g(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

a) Montrer que F et G sont bien définies.

b) Montrer que F et G sont continues et bornées.

c) Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_0^\infty F(x) g(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_0^\infty g(x)\, dx - \int_0^\infty f(x) G(x)\, dx.$$

Exercice # 25. (Calcul d'intégrales oscillantes) Pour $0 < a < 2$, soit

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx \text{ (intégrale généralisée).}$$

1. En établissant et utilisant l'identité

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt}\, dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x > 0,$$

montrer que

$$I(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2 + 1}\, dt.$$

2. En se ramenant à un calcul de fonction Bêta d'Euler, montrer que

$$I(a) = \frac{\Gamma(a/2)\, \Gamma(1 - a/2)}{2\, \Gamma(a)}.$$

Exercice # 26. (Pseudo-changement de variables) Soit $\phi \in C^1([a, b], [c, d])$ telle que $\phi(a) = c$ et $\phi(b) = d$. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_a^b f(\phi(y))\, \phi'(y)\, dy,\ \forall\, f : [c, d] \to \mathbb{R} \text{ borélienne et bornée.} \tag{7}$$

a) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. Montrer qu'il existe une suite $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que $f_j \searrow \chi_K$. Indication : lemme d'Urîsohn.

b) (i) Prouver (7) si $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ est continue.

(ii) Prouver (7) si $f := \chi_K$, avec $K \subset [c, d]$ compact.

(iii) Soit

$$\mathscr{A} := \{B \in \mathscr{B}_{[c,d]}\, ;\, f = \chi_B \text{ satisfait (7)}\}.$$

Montrer que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{[c,d]}$. Indication : classe monotone.

(iv) Prouver (7) si $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ est borélienne et bornée.

Exercice # 27. (Formule de l'indicatrice de Banach (I)) Soient $I :=]a,b[\subset \mathbb{R}$ et $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R})$. Soient

$$F := \{x \in I\, ;\, \Phi'(x) = 0\},\ V := I \setminus F,\ Y := \Phi(V) \text{ et } W := \Phi(I).$$

Soit # la mesure de comptage :

$$\#A := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous nous proposons de montrer les propriétés suivantes.

1. $W \subset \mathbb{R}$ est borélien.
2. Si $f : W \to [0, \infty[$ est borélienne, alors

$$W \ni x \mapsto f(x)\, \#\Phi^{-1}(x) \in [0,\infty] \text{ et } I \ni y \mapsto f(\Phi(y))\, |\Phi'(y)| \in [0,\infty[$$

sont Lebesgue mesurables.

3. La *formule de l'indicatrice de Banach* :

$$\int_W f(x)\, \#\Phi^{-1}(x)\, dx = \int_I f(\Phi(y))\, |\Phi'(y)|\, dy.$$

Voici la démarche proposée.

a) Montrer que Y est un ouvert.

b) Montrer que $Y \ni x \mapsto \#[\Phi^{-1}(x) \cap V] \in [0,\infty]$ est borélienne.

c) Montrer que, avec f comme ci-dessus,

$$\int_V f(\Phi(y))\, |\Phi'(y)|\, dy = \int_{\Phi(V)} f(x)\, \#[\Phi^{-1}(x) \cap V]\, dx.$$

d) Soit $K \subset U$ un compact. Montrer que

$$\nu_1(\Phi(K)) \leq \max_{x \in K} |\Phi'(x)|\, \nu_1(K).$$

Indication : recouvrir K avec des intervalles disjoints, chacun de longueur ε.

e) Montrer que $\Phi(F)$ est borélien et que $\nu_1(\Phi(F)) = 0$.

f) Obtenir les résultats désirés.

g) Montrer que les résultats restent vrais en supposant f Lebesgue mesurable au lieu de borélienne.

Exercice # 28. (Formule de l'indicatrice de Banach (II)) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soient

$$F := \{x \in U\, ;\, J_\Phi(x) = 0\},\ V := U \setminus F,\ Y := \Phi(V) \text{ et } W := \Phi(U).$$

Nous nous proposons de montrer les propriétés suivantes.

1. $W \subset \mathbb{R}^n$ est borélien.

2. Si $f : W \to [0,\infty[$ est borélienne, alors

$$W \ni x \mapsto f(x)\,\#\Phi^{-1}(x) \in [0,\infty] \text{ et } U \ni y \mapsto f(\Phi(y))\,|J_\Phi(y)| \in [0,\infty[$$

sont Lebesgue mesurables.

3. La *formule de l'indicatrice de Banach* :

$$\int_W f(x)\,\#\Phi^{-1}(x)\,dx = \int_U f(\Phi(y))\,|J_\Phi(y)|\,dy.$$

Voici la démarche proposée.

a) Montrer que Y est un ouvert. Indication : théorème d'inversion locale.

b) Montrer que $Y \ni x \mapsto \#[\Phi^{-1}(x) \cap V] \in [0,\infty]$ est borélienne.

c) Montrer que, avec f comme ci-dessus,

$$\int_V f(\Phi(y))\,|J_\Phi(y)|\,dy = \int_{\Phi(V)} f(x)\,\#[\Phi^{-1}(x) \cap V]\,dx.$$

d) Question d'échauffement. Supposons $0 \in F$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\nu_n(\Phi([0,\varepsilon[^n)}{\varepsilon^n} = 0.$$

e) Soit $K \subset F$ un compact. Montrer que

$$\nu_n(\Phi(K)) = 0.$$

Indications : recouvrir K avec des cubes de taille ε et utiliser le raisonnement de la question précédente.

f) Montrer que $\Phi(F)$ est borélien et que $\nu_n(\Phi(F)) = 0$.

g) Obtenir les résultats désirés.

h) Montrer que les résultats restent vrais en supposant f Lebesgue mesurable au lieu de borélienne.

Exercice # 29. (Dérivée de l'intégrale) Nous travaillons dans $([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Soit $F(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt, \forall\, x \geq 0$.

Soit $g \in C([0,\infty[)$.

a) Montrer que $[0,\infty[\ni x \mapsto h(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} g(t)f(x-t)\,dt$ est continue.

b) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)F(x-t)\,dt$ est de classe C^1, de dérivée h.

Exercice # 30. (Inégalités de Hardy générales) Soient $1 \leq q < \infty$, $0 < r < \infty$ et $g :]0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction Lebesgue mesurable. Montrer l'*inégalité de Hardy en* 0

$$\int_0^\infty t^{-r-1} \left(\int_0^t g(u)\,du \right)^q dt \leq \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty u^{-r+q-1} (g(u))^q\,du \tag{8}$$

et l'*inégalité de Hardy à l'infini*

$$\int_0^\infty t^{r-1} \left(\int_t^\infty g(u)\,du \right)^q dt \leq \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty u^{r+q-1} (g(u))^q\,du. \tag{9}$$

Indication : on peut envisager une intégration par parties, comme dans le cas de l'inégalité de Hardy. Avec cette démarche, essayer de démontrer les résultats au moins si $g \in C_c^\infty([0,\infty[)$.

Pour une preuve élégante, basée sur l'inégalité de Jensen et valable pour toute fonction g, voir Stein et Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Lemma 3.14, chapitre 5.

Exercice # 31. (Construction d'une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $G := \chi_{[0,1]}$. Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$G_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, montrer que $f * G_\varepsilon \in C(\mathbb{R})$.

b) Plus généralement, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j > 0$, montrer que $f * G_{\varepsilon_1} * \cdots * G_{\varepsilon_j} \in C^{j-1}(\mathbb{R})$.
Et si $f \in C(\mathbb{R})$?

c) Soit $(\varepsilon_j)_{j\geq 0} \subset]0,\infty[$ une suite telle que $S := \sum_j \varepsilon_j < \infty$. Soit

$$f_0(x) := \begin{cases} (2/\varepsilon_0) - (2/\varepsilon_0)^2\,|x - \varepsilon_0/2|, & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour $j \geq 1$, soit $f_j := f_0 * G_{\varepsilon_1} * \cdots * G_{\varepsilon_j}$. Montrer que :

(i) $f_j(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou si $x \geq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j$.

(ii) $f_j \in C^j, \forall\, j \geq 0$.

(iii) $\left|(f_j)^{(k)}(x)\right| \leq 2^{k+1}/(\varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k), \forall\, x, \forall\, k \geq 0, \forall\, j \geq k$.

(iv) $|f_{j+\ell}(x) - f_j(x)| \leq 2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{j+\ell})/(\varepsilon_0\,\varepsilon_1), \forall\, x, \forall\, j \geq 1, \forall\, \ell \geq 1$.

(v) Trouver une majoration analogue à celle du point précédent pour $|f_{j+\ell}^{(k)}(x) - f_j^{(k)}(x)|, \forall\, x, \forall\, k \geq 0, \forall\, j \geq k+1, \forall\, \ell \geq 1$.

d) En déduire que la suite $(f_j)_j$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f avec les propriétés suivantes :

i) $f \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,\infty[)$.

ii) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq S$.

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ d'où, en particulier, $f \not\equiv 0$.

Exercice # 32. (Bases orthonormées de polynômes) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide borné muni de la mesure de Lebesgue. Nous munissons $L^2 := L^2(I)$ du produit scalaire « usuel », $(f,g) := \displaystyle\int_I f\,g$.

a) Montrer que si deux fonctions polynomiales coïncident p. p. sur I, alors les polynômes correspondants sont égaux. Ainsi, nous pouvons identifier tout polynôme avec la fonction polynomiale associée sur I. (Expliquer.)

b) Montrer qu'avec cette identification, nous avons $P \in L^p(I), \forall\, 1 \leq p \leq \infty, \forall\, P \in \mathbb{R}[X]$.
Soit $(P_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}[X]$ une suite de polynômes telle que :

i) $\deg P_k = k, \forall\, k$.

ii) (P_k) est une suite orthonormée dans L^2 ; c'est-à-dire, $(P_j, P_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}, \forall\, j, k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $(P_k)_{k=0,\ldots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. †

†. Ici, nous considérons $\mathbb{R}_n[X]$ comme un sous espace de L^2 – voir le début de l'item b).

d) En déduire que, pour tout $N \geq n$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, nous avons $P = \sum_{k=0}^{N} (P, P_k)\, P_k$.

e) Soient $f \in L^2$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_{L^2} < \varepsilon$. On pourra utiliser, entre autres, le théorème de Weierstrass : si $g \in C([a, b])$, alors il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ telle que $Q_n \to g$ uniformément sur $[a, b]$).

f) En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout $f \in L^2$ nous avons

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, e_k)\, e_k, \text{ au sens où } \sum_{k=0}^{N} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ dans } L^2 \text{ quand } N \to \infty. \tag{10}$$

g) Soient $I :=]-1, 1[$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ donnés par $P_k(x) := \alpha_k \dfrac{d^k}{dx^k} \left[(x^2 - 1)^k\right]$ (avec l'identification entre polynômes et fonctions polynomiales). Montrer que pour $\alpha_k > 0$ convenablement choisis (que l'on déterminera), la suite (P_k) satisfait i) et ii) et donc nous avons (10). Les P_k sont (à des constantes multiplicatives près) les *polynômes de Legendre*.
On pourra utiliser sans preuve la formule

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^k \, dx = \frac{2^{k+1}\, k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k + 1)}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Exercice # 33. (Théorème d'Orlicz) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide muni de la mesure de Lebesgue. Nous considérons une suite $(e_k)_{k \geq 0} \subset L^2 = L^2(I)$ orthonormée et telle que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, e_k)\, e_k, \ \forall\, f \in L^2. \tag{11}$$

De telles suites existent : voir, par exemple, l'exercice précédent.

a) Montrer que, pour tout f, il existe une suite extraite (N_ℓ) (qui en principe dépend de f) telle que

$$\sum_{k=0}^{N_\ell} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ p. p. quand } \ell \to \infty.$$

b) En déduire que, pour tout $f \in L^2$, nous avons

$$[f(x)]^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} [(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 \text{ pour presque tout } x \in I. \tag{12}$$

c) En prenant, dans (12), $f := \chi_A$, avec A convenable, en déduire le *théorème d'Orlicz* : pour presque tout $x \in I$ nous avons $\sum_k [e_k(x)]^2 = \infty$.
Indication : commencer par l'ensemble

$$B := \left\{ x \in I \, ; \, \sum_k [e_k(x)]^2 < \infty \right\}$$

et utiliser l'exercice # 47 de la feuille #2 pour construire A.

Exercice # 34. (Convergence des séries de Fourier) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 et 2π-périodique.

a) Calculer $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f'')$, où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n x}$ converge, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer la somme de cette série.

Exercice # 35.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et *lipschitzienne* sur $[-\pi, 3\pi]$. Calculer $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Même question si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et *hölderienne* sur $[-\pi, 3\pi]$, c'est-à-dire : il existe $a \in]0,1[$ et $C < \infty$ tels que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^a,\ \forall\, x, y \in [-\pi, 3\pi].$$

Indication pour les deux questions : reprendre la preuve du théorème de Dirichlet.

Exercice # 36. (Inégalités faibles de Bernstein (II)) Cet exercice continue l'exercice # 17 de la feuille # 8. La philosophie générale est la même : des inégalités qui ne sont pas vraies pour des fonctions *quelconques* sont valides pour des polynômes trigonométriques. Prenons l'exemple de la comparaison entre $\|f\|_{L^p}$ et $\|f\|_{L^r}$, pour des fonctions définies sur $]0, 2\pi[$, muni avec la mesure $(1/2\pi)\,\lambda_1$. Cette mesure étant finie (en fait, une probabilité), nous avons $f \in L^p \implies f \in L^r, \forall\, 1 \leq r \leq p \leq \infty$, et des exemples simples montrent que l'implication $f \in L^p \implies f \in L^r$ est fausse si $r > p$. Néanmoins, nous allons montrer l'inégalité suivante, *à la Bernstein* :

$$\|f\|_{L^r} \leq 3^{(1-1/p)(1-p/r)} \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p-1/r} \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \qquad (13)$$
$$\forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n, \text{ avec } n \geq 1.$$

En combinant (13) avec la conclusion de l'exercice # 17 de la feuille # 8, nous obtenons

$$\|f'\|_{L^r} \leq 3^{(1-1/p)(1-p/r)+1} n \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p-1/r} \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \qquad (14)$$
$$\forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n, \text{ avec } n \geq 1.$$

Ces deux inégalités sont *faibles*, au sens où les constantes qui y apparaissent ne sont pas les meilleures, mais l'*ordre de grandeur* des constantes est bon : il est $n^{1/p-1/r}$ dans (13) et $n^{1/p-1/r+1}$ dans (14). On peut montrer que cet ordre de grandeur est optimal, mais nous n'allons pas vérifier ce fait.

Passons à la preuve de (13).

a) Montrer le cas particulier suivant de l'inégalité de Young pour la convolution des fonctions 2π-périodiques :

$$|f * g| \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q},\ \forall\, p, q \text{ conjugués}, \forall\, f \in L^p,\ g \in L^q.$$

b) Soit $V_n := 2\,F_{2n+1} - F_n$, $n \in \mathbb{N}$, avec F_j les noyaux de Fejér; V_n est le *noyau de de La Vallée Poussin*. Montrer les propriétés suivantes de V_n.

(i) $V_n(x) = \displaystyle\sum_{|j|\leq n+1} e^{\imath jx} + \sum_{n+1<|j|\leq 2n+1} \left(1 - \frac{|j|}{2(n+1)}\right) e^{\imath jx}$.

(ii) $\|V_n\|_{L^1} \leq 3$.

(iii) $\|V_n\|_{L^\infty} = \dfrac{5n+6}{2}$.

(iv) $\|V_n\|_{L^q} \leq 3^{1/q} \left(\dfrac{5n+6}{2}\right)^{1-1/q}, \forall\, 1 \leq q \leq \infty$.

c) Soit f un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ (avec $n \geq 1$). Montrer que $f * V_{n-1} = f$.

d) En déduire que

$$|f| \leq 3^{1-1/p} \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p} \|f\|_{L^p}, \forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n, \text{ avec } n \geq 1.$$

e) En déduire (13). Indication : inégalité de Hölder.

Exercice # 37. (Convolution et transformée de Fourier) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\underbrace{f * f \cdots * f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice # 38. (Calcul de transformée de Fourier dans $\mathscr{L}^2$) Nous travaillons dans le cadre de la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$.

a) Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $x \mapsto g(x) := x f(x) \in \mathscr{L}^1$, montrer que $\widehat{f} \in C^1$ et que $\widehat{g} = \imath \widehat{f}\,'$.

b) Si $\varepsilon > 0$, calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto h_\varepsilon(x) := \dfrac{e^{-\varepsilon x^2}}{x+\imath}$. Indication : se débarrasser du dénominateur.

c) Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto g(x) := \dfrac{1}{x+\imath}$.

Exercice # 39. (Transformée de Fourier d'un produit de convolution) Nous considérons l'égalité

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}. \tag{15}$$

a) Donner un sens à (15) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la montrer.

b) Donner un sens à (15) si $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la montrer.

Exercice # 40. (Transformée de Fourier dans L^p) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$. Rappelons que, si $f \in \mathscr{L}^1$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{L}^\infty$, alors que, si $f \in L^2$, on peut définir $\widehat{f}$ comme un élément de L^2 (théorème de Plancherel). Nous nous proposons de montrer un résultat similaire pour les fonctions de L^p, avec $1 < p < 2$.

Nous travaillons avec des fonctions au lieu de classes.

Rappelons que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est borélienne, alors la *fonction de distribution de f* est

$$F(t) = F_f(t) := \nu_n(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |f(x)| > t\}),\ \forall\, t > 0.$$

Les trois premières questions sont des rappels.

a) Montrer que $F : [0, \infty[\to [0, \infty]$ est borélienne.

b) Pour $1 \le p < \infty$, montrer la formule

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1}\, F(t)\, dt.$$

c) Si $1 \le p < \infty$ et $t > 0$, montrer l'*inégalité de Markov*

$$F(t) \le \frac{\|f\|_{L^p}^p}{t^p}.$$

À partir de maintenant, nous supposons $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

d) Montrer que $0 < \|f\|_{L^r}^r < \infty, \forall\, 1 \le r < \infty$.

e) Pour $a > 0$, soient

$$g_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \le a \\ a, & \text{si } f(x) > a \\ -a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases},\quad h_a(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } |f(x)| \le a \\ f(x) - a, & \text{si } f(x) > a \\ f(x) + a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}.$$

(i) Montrer que $g_a, h_a \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Calculer $\|g_a\|_{L^2}^2$ et $\|h_a\|_{L^1}$ en fonction de F_f.

(iii) Montrer que

$$\|h_a\|_{L^1} \leq \frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_{L^p}^p,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, 1 < p < \infty.$$

(iv) Soit $t > 0$. Nous définissons $a = a_t > 0$ comme la solution positive de

$$\frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_{L^p}^p = \frac{t}{2}.$$

Montrer que, pour cet a, nous avons

$$|\widehat{h_a}(\xi)| \leq \frac{t}{2},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\widehat{f}(\xi)| > t\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\, |\widehat{g}_a(\xi)| > t/2\}. \tag{16}$$

f) Soit $1 < p < 2$. Soit q le conjugué de p. En utilisant (16), le théorème de Plancherel et l'inégalité de Markov, montrer l'existence d'une constante $C = C_p < \infty$ (dont on donnera la valeur) telle que

$$\|\widehat{f}\,\|_{L^q} \leq C_p \|f\|_{L^p},\ \forall\, f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \tag{17}$$

g) En utilisant (17), montrer le résultat suivant, après lui avoir donné un sens précis : la transformée de Fourier est continue de L^p vers L^q.

NB. Le *théorème de Hausdorff-Young* affirme que (17) est vraie avec $C_p = (2\pi)^{n/q}$ (qui est une constante inférieure à celle obtenue par la calcul explicite ci-dessus).

La constante $C_p = (2\pi)^{n/q}$ n'est pas la meilleure. Le (très difficile) *théorème de (Babenko-)Beckner* affirme que la (meilleure) constante est $(2\pi)^{n/q} \dfrac{p^{n/(2p)}}{q^{n/(2q)}}$.

Exercice # 41. (Inégalités de Nikolski'ĭ) Cet exercice fait echo aux inégalités de Bernstein (exercice # 17 de la feuille # 8 et exercice de synthèse # 36). Le thème est le même : des inégalités entre normes $\|\ \|_{L^p}$ et $\|\ \|_{L^r}$, qui sont fausses *en général*, sont vraies *sous des hypothèses concernant le support de la transformée de Fourier.*

Pour commencer, nous faisons l'hypothèse

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{18}$$

qui permet de considérer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f ; cette hypothèse peut être affaiblie, mais ceci demande de travailler dans le cadre (qui dépasse ce cours) des *distributions tempérées*.

L'hypothèse *essentielle* est

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \tag{19}$$

(avec $0 < R < \infty$ constante arbitraire). C'est l'*analogue* de la condition « f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ », qui équivaut à $c_j(f) = 0$ si $|j| > n$.

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de montrer les *inégalités de Nikolskiĭ directes*

$$\|f\|_{L^r} \leq C_1 R^{n(1/p-1/r)}\, \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{20}$$

$$\|\partial_j f\|_{L^r} \leq C_2 R^{n(1/p-1/r)+1}\, \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty,\ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{21}$$

où C_1, C_2 sont des constantes *finies* qui peuvent dépendre de n, p et r, mais pas de f ou R. Au passage, sous les hypothèses (18) et (19), nous montrerons que $f \in C^1$.

Sous l'hypothèse *plus forte* (22),

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \text{ ou si } |\xi| \leq \frac{R}{2}, \tag{22}$$

nous avons également l'*inégalité de Nikolskiĭ inverse,* énoncée et prouvée, *par souci de simplicité,* uniquement si $n = 1$:

$$\|f\|_{L^r} \leq C_3 R^{1/r-1/p-1} \|f'\|_{L^p}, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{23}$$

où C_3 est une constante *finie* qui peut dépendre de p et r, mais pas de f ou R.

Voici la démarche proposée pour montrer (20), (21) et (23).

a) (Argument de *changement d'échelle*) En supposant l'une de trois inégalités vraie pour $R = 1$, elle est vraie pour *tout* R. Voici l'argument pour (20). Soit f une fonction vérifiant (18) et (19). Soit (avec les notations de l'exercice $\#1$ a) de la feuille $\#9$) $g := f_R$.
   (i) Montrer que g vérifie les hypothèses (18) et (19), la dernière pour $R = 1$.
   (ii) En appliquant (20) (supposée vraie si $R = 1$) à g, et en calculant $\|g\|_{L^r}$, respectivement $\|g\|_{L^p}$ en fonction de $\|f\|_{L^r}$, respectivement $\|f\|_{L^p}$, obtenir (20) pour f.

b) Vérifier que la même démarche est valide pour (21) et (23).

c) (Preuve de (20) si $R = 1$)
   (i) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$.
   (ii) Montrer qu'il existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\psi} = \varphi$.
   (iii) Montrer que, de plus, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (iv) Montrer que $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall\, 1 \leq q \leq \infty$.
   (v) Soit f vérifiant (18) et (19) avec $R = 1$. Montrer que $f = f * \psi$. Indication : prendre la transformée de Fourier dans cette égalité.
   (vi) Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ sont tels que $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, montrer que $\|f\|_{L^r} \leq \|\psi\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$.
   (vii) Conclure.

d) (Preuve de (21) si $R = 1$)
   (i) Montrer successivement que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_j \psi \in L^1$, $\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = \imath \xi_j\, \varphi(\xi)$, $\partial_j \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\partial_j \psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall\, 1 \leq q \leq \infty, \forall\, j \in [\![1, n]\!]$.
   (ii) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial_j f = f * \partial_j \psi, \forall\, j \in [\![1, n]\!]$.
   (iii) Conclure.

e) (Preuve de (23) si $R = 1$) D'après les questions précédentes, nous savons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in L^p(\mathbb{R})$ (et, par ailleurs, que $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Il reste à montrer (23).
   (i) Montrer qu'il existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\zeta(\xi) = \frac{1}{\imath \xi}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$

   (ii) Montrer qu'il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\eta} = \zeta$.
   (iii) Montrer que $f = f' * \eta$.
   (iv) Conclure, sur le modèle des questions précédentes.