Analyse Fonctionnelle - Exo 9 et 19.2

Trinome RAF - Romane Giard, Aniss Fares et Félix Castillon

Les Rapporteurs d'Analyse Fonctionnelle

1 Exercice 9

Si p est une norme sur E, C est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, donc C est convexe.

En effet, soient $x, y \in C$ et $t \in \ [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
p((1-t)\ x + ty) &\leq p((1-t)\ x) + p(t\ y) \\
&= (1-t)\ p(x) + t\ p(y) && t \text{ et } 1-t \text{ sont positifs} \\
&\leq (1-t) + t && p(x) \text{ et } p(y) \text{ sont inférieurs à } 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $(1-t)\ x + t\ y \in C$, donc C est convexe.

Réciproquement si C est convexe, il suffit de montrer que p vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$, si $x = 0$, on a $p(x+y) = p(y) = p(x) + p(y)$, donc l'inégalité triangulaire est vérifiée. De même, elle est vérifiée si $y = 0$. On suppose donc x et y non nuls de manière à pouvoir diviser par $p(x)$ et $p(y)$. On a

$$\begin{aligned}
& p(x+y) \leq p(x) + p(y) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) \leq 1 && \text{car } p(x) + p(y) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in C
\end{aligned}$$

Or on a $p\left(\dfrac{x}{p(x)}\right) = \dfrac{p(x)}{p(x)} = 1$, donc $\dfrac{x}{p(x)} \in C$ et de même $\dfrac{y}{p(y)} \in C$.
Soit $t = \dfrac{p(y)}{p(x)+p(y)} \in [0,1]$, on a $(1-t) = \dfrac{p(x)}{p(x)+p(y)}$, et donc

$$\begin{aligned}(1-t)\ \frac{x}{p(x)} + t\ \frac{y}{p(y)} &= \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\ \frac{x}{p(x)} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}\ \frac{y}{p(y)} \\ &= \frac{x}{p(x)+p(y)} + \frac{y}{p(x)+p(y)} \\ &= \frac{x+y}{p(x)+p(y)}\end{aligned}$$

Donc par convexité de C, on a $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)} \in C$, donc $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, donc p est bien une norme.

2 Exercice 19.2

Cet exercice a été rédigé avant que l'on fasse le 19.1 en cours. Nous avions fait certaines choses différemment, mais la correction du 19.1 s'adapte sans peine pour résoudre le 19.2. La seule chose à faire est de remplacer la valeur absolue de $\mathbb{R}$ par la norme de Y.

Soient $f, g \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$, montrons que $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.
Soit $A = \left\{\dfrac{||f(x)+g(x)-f(y)-g(y)||}{d(x,y)}; x, y \in X, x \neq y\right\}$. Pour $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, on a

$$\begin{aligned}\frac{||f(x)+g(x)-f(y)-g(y)||}{d(x,y)} &\leq \frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)} + \frac{||g(x)-g(y)||}{d(x,y)} \\ &\leq ||f|| + ||g||\end{aligned}$$

donc $||f|| + ||g||$ majore A, donc $\sup(A) \leq ||f|| + ||g||$, donc $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Soient $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $||\lambda f|| = |\lambda|\ ||f||$.
On a

$$\begin{aligned}
||\lambda f|| &= \sup_{x\neq y}\left(\frac{||\lambda f(x)-\lambda f(y)||}{d(x,y)}\right)\\
&= \sup_{x\neq y}\left(|\lambda|\frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)}\right)\\
&= |\lambda| \sup_{x\neq y}\left(\frac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)}\right) \qquad (\dagger)\\
&= |\lambda|\ ||f||
\end{aligned}$$

($\dagger$) est valide car $|\lambda|$, $||f(x)-f(y)||$ et $d(x,y)$ sont positifs, et le sup est fini.

Noter que ces deux résultats restent vrais en dehors de $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ si on prend la convention $0\cdot(+\infty)=0$.

On a maintenant les outils pour montrer que $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ est un espace vectoriel. Déjà, pour f identiquement nulle, on a $f(x_0)=0$ et $||f||=0$, donc $0\in\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Ensuite, pour $f,g\in\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on a $(\lambda f+\mu g)(x_0)=\lambda f(x_0)+\mu g(x_0)=0+0=0$. Et on a $||\lambda f+\mu g||\leq||\lambda f||+||\mu g||=|\lambda|\ ||f||+|\mu|\ ||g||<+\infty$ car $||f||$ et $||g||$ sont finies. Donc $\lambda f+\mu g\in\mathrm{Lip}_0(X,Y)$, et donc $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ est un sous espace vectoriel de l'espace des applications de X dans Y.

Et montrons que $||.||$ est une norme sur $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Déjà $||.||$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par définition de $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Noter que jusqu'ici on ne parlait pas de norme ! $||.||$ était à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$
On a montré que l'homogénéité et l'inégalité triangulaire étaient vérifiées sur l'espace des applications de X dans Y, donc elles restent valides sur $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Montrons la séparation.

Soit $f\in\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ telle que $||f||=0$. Pour $x,y\in X, x\neq y$ on a $\dfrac{||f(x)-f(y)||}{d(x,y)}=0$ i.e. $||f(x)-f(y)||$ i.e. $f(x)=f(y)$. Donc f est constante, or $f(x_0)=0$, donc $f=0$. Donc on a la séparation, donc $||.||$ est bien une norme sur $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ (et non pas sur l'espace des applications de X dans Y !).

$\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ est donc un e.v.n, montrons qu'il est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$.

Montrons que (f_n) converge simplement vers une limite f (à priori pas dans $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$). Supposons que X contient au moins deux points, soit $x\in X, x\neq x_0$, montrons que $(f_n(x))\subset Y$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon>0$, on a $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que pour $n,m\geq N_\varepsilon$, $||f_n-f_m||\leq\dfrac{\varepsilon}{d(x,x_0)}$. Donc pour de

tels n, m, on a pour $y \in X, y \neq x$, $\dfrac{||f_n(x) - f_n(y) - f_m(x) + f_m(y)||}{d(x,y)} \leq \dfrac{\varepsilon}{d(x, x_0)}$.
En particulier si $y = x_0$, on obtient $||f_n(x) - f_m(x)|| \leq \varepsilon$.
Donc $(f_n(x))$ est de Cauchy, donc par complétude de Y, elle converge vers une limite $f(x)$.
Et comme $f_n(x_0)$ est nul pour tout n, on définit $f(x_0) = 0$.
On a alors $\forall x \in X, f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Montrons enfin que $f \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ et que (f_n) tend vers f dans $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$.
Soit $\varepsilon > 0$, (f_n) est de Cauchy, donc on a N_ε tel que pour $x, y \in X, x \neq y$ et pour $n, m \geq N_\varepsilon$, on a $||f_n(x) - f_n(y) - f_m(x) + f_m(y)|| \leq \varepsilon\ d(x, y)$. Par passage à la limite quand m tend vers $+\infty$, on a $||f_n(x) - f_n(y) - f(x) + f(y)|| \leq \varepsilon\ d(x, y)$. On en déduit que pour $n \geq N_\varepsilon$, $||f_{N_\varepsilon} - f|| \leq \varepsilon$ (‡).

On a donc en particulier $||f_{N_1} - f|| \leq 1$. Or on a $f(x_0) = 0$, donc $f_{N_1}(x_0) - f(x_0) = 0$. Donc $f_{N_1} - f \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$, donc comme c'est un espace vectoriel, $f \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$.

Et (‡) donne également $||f_n - f|| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$.

Donc $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ est complet, donc c'est un espace de Banach.

Remarque de Petru : Le fait que d est une distance n'a pas entièrement servi, nous avons juste eu besoin du fait que si $x \neq y$, alors $d(x, y) > 0$.