TD d'analyse, exercice 7 feuille 3

Baptiste Boerkmann, Théotime Brun, Adrien Marion

18 octobre 2022

1. Dans toute cette question j désigne un entier $\geqslant 1$ fixé.

   (a) Montrons par récurrence que pour $0 \leqslant k \leqslant j-1$, $|x_j(k/j)| \leqslant k/j$. Par définition de x_j, $|x_j(0)| = 0$, ce qui justifie l'initialisation. Supposons que la propriété soit vraie pour un $0 \leqslant k \leqslant j-2$ et montrons la pour $k+1$. On a

$$\begin{aligned}\left|x_j\left(\tfrac{k+1}{j}\right)\right| &= \left|x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) + \left(\tfrac{k+1}{j} - \tfrac{k}{j}\right) f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \left|x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right| + \tfrac{1}{j}\left|f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\right|,\end{aligned}$$

   ainsi par hypothèse de récurrence et comme $|f| \leqslant 1$ on a

$$\left|x_j\left(\tfrac{k+1}{j}\right)\right| \leqslant \tfrac{k+1}{j}.$$

   (b) Soit $0 \leqslant k \leqslant j-1$ et $t, s \in [0,1]$, supposons que $t, s \in [k/j,\ (k+1)/j]$. On a alors

$$\begin{aligned}|x_j(t) - x_j(s)| &= \left|x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) + \left(t - \tfrac{k}{j}\right) f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. - x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) - \left(s - \tfrac{k}{j}\right) f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\right| \\ &= |t-s|\left|f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\right| \leqslant |t-s|.\end{aligned}$$

   Supposons maintenant qu'il existe $0 \leqslant k \leqslant j-1$ et $n \geqslant 1$ tels que $t \in [k/j, (k+1)/j]$ et $s \in [(k+n)/j, (k+n+1)/j]$. Cela donne

$$\begin{aligned}|x_j(t) - x_j(s)| &= \left|x_j(t) - \sum_{\ell=1}^{n} x_j\left(\tfrac{k+\ell}{j}\right) + \sum_{\ell=1}^{n} x_j\left(\tfrac{k+\ell}{j}\right) - x_j(s)\right| \\ &\leqslant \left|x_j(t) - x_j\left(\tfrac{k+1}{j}\right)\right| \\ &\qquad + \sum_{\ell=2}^{n}\left|x_j\left(\tfrac{k+\ell-1}{j}\right) - x_j\left(\tfrac{k+\ell}{j}\right)\right| \\ &\qquad\quad + \left|x_j\left(\tfrac{k+n}{j}\right) - x_j(s)\right| \\ &\leqslant \left|t - \tfrac{k+1}{j}\right| + \sum_{\ell=2}^{n}\left|\tfrac{k+\ell-1}{j} - \tfrac{k+\ell}{j}\right| + \left|\tfrac{k+n}{j} - s\right| \\ &\leqslant \tfrac{k+1}{j} - t + \left(\sum_{\ell=2}^{n}\tfrac{1}{j}\right) + s - \tfrac{k+n}{j} \\ &= \tfrac{k+1}{j} - t + \tfrac{n-1}{j} + s - \tfrac{k+n}{j} = s - t = |t-s|\end{aligned}$$

où l'on a notamment appliqué le résultat précédent à chaque terme de la somme à la deuxième inégalité. En faisant $s = 0$ on a en particulier $|x_j(t)| \leqslant |t| = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

(c) Soient k et t comme dans l'énoncé, on a par la relation de Chasles

$$\int_0^t f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s + \int_{k/j}^{t} f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s. \quad (1)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) + \left(t - \tfrac{k}{j}\right) f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right) \\ &= x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) + \int_{k/j}^{t} f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Comme $x_j(0) = 0$ et que pour $0 \leqslant k \leqslant j-1$

$$x_j\left(\tfrac{k+1}{j}\right) = x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) + \tfrac{1}{j} f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right),$$

on a par récurrence immédiate

$$x_j\left(\tfrac{k}{j}\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{j} f\left(\tfrac{\ell}{j}, x_j\left(\tfrac{\ell}{j}\right)\right).$$

On en déduit que

$$x_j(t) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{\ell/j}^{\ell+1/j} f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\,\mathrm{d}s + \int_{k/j}^{t} f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right)\,\mathrm{d}s. \quad (2)$$

En retranchant (1) à (2) on démontre l'égalité voulue, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s = \\ &\quad \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} \left(f\left(\tfrac{\ell}{j}, x_j\left(\tfrac{\ell}{j}\right)\right) - f\left(s, x_j(s)\right) \right)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{k/j}^{t} \left(f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right) - f\left(s, x_j(s)\right) \right)\,\mathrm{d}s. \quad (3) \end{aligned}$$

(d) En prenant la valeur absolue dans (3) et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned}
\left|x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant& \\
&\sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} \left|f\left(\tfrac{\ell}{j}, x_j\left(\tfrac{\ell}{j}\right)\right) - f\left(s, x_j(s)\right)\right| \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{k/j}^{t} \left|f\left(\tfrac{k}{j}, x_j\left(\tfrac{k}{j}\right)\right) - f\left(s, x_j(s)\right)\right| \,\mathrm{d}s \\
\leqslant& \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} M_j\,\mathrm{d}s + \int_{k/j}^{t} M_j\,\mathrm{d}s = \int_0^t M_j\,\mathrm{d}s = M_j t. \quad (4)
\end{aligned}$$

où l'on a pu majorer les intégrandes par M_j car il est clair que les arguments sont suffisamment proches.

2. Montrons que $M_j \to 0$ lorsque $j \to \infty$. Puisque f est continue sur l'ensemble $[0,1] \times [-1,1]$ et que toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^2$ elle l'est pour la norme infinie, et puisque l'ensemble $[0,1] \times [-1,1]$ est compact elle y est uniformément continue, ce qui s'exprime par le fait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $j \geqslant 1$ tel que

$$\sup_{\substack{y,z \in [0,1]\times[-1,1] \\ \|y-z\|_{\infty,\mathbb{R}^2} \leqslant 1/j}} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

or cette borne supérieure est précisément M_j qui tend donc vers 0 lorsque $j \to \infty$. On en déduit donc avec (4) que la suite

$$\left(t \mapsto x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\,\mathrm{d}s\right)_{j \geqslant 0}$$

converge uniformément vers 0. On a de plus démontré en 1. (b) que la suite $(x_j)_{j\geqslant 1}$ de fonctions 1-lipschitziennes sur $[0,1]$ est uniformément bornée et équicontinue. Puisque l'espace de départ $[0,1]$ est compact le théorème d'Ascoli fournit une sous-suite uniformément convergente.

Fixons φ une extractrice de $(x_j)_{j\geqslant 1}$ la faisant converger vers une fonction x. On a donc avec ce qui précède que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\int_0^t f\left(s, x_{\varphi(j)}(s)\right)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{j\to\infty} x(t).$$

Soit $t \in [0,1]$, pour tout $j \geqslant 1$ on pose $g_j\colon s \mapsto f(s, x_{\varphi(j)}(s))$ et $g\colon s \mapsto f(s, x(s))$. Par continuité de f la suite $(g_j)_{j\geqslant 1}$ converge ponctuellement vers g, on a la domination $|g_j| \leqslant 1$ pour tout $j \geqslant 1$ et la fonction prenant de manière générique la valeur 1 est intégrable sur $[0,t]$ donc par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^t g_j(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{j\to\infty} \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi, par unicité de la limite,

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

3. La fonction g est continue donc par le théorème de Leibniz-Newton on a pour tout $t \in [0,1]$ que
$$x'(t) = f(t, x(t))$$
ainsi que la condition $x(0) = 0$ (car $x_j(0) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$). Cela montre que x est une solution du problème de Cauchy initial.