Analyse Fonctionnelle 1 - TT12

Baptiste Boerkmann, Julien Fombaron, Pierre Gueugneau, Simon Portal

19 octobre 2022

Feuille 4 : Exercice 7

Le but de cet exercice est de montrer un critère pour qu'une projection sur un sous-espace fermé soit la projection orthogonale sur ce sous-espace.

Soient H un espace de Hilbert *(supposé réel)* et $F \subset H$ un sous-espace fermé non nul.
Soit P une projection de H sur F, c'est-à-dire $P : H \to F$ est linéaire et $P(x) = x$, $\forall x \in F$.
On montre que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $P = P_F$
(ii) P est continue et $\|P\| = 1$
(iii) $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in H$

(i)⇒(ii). On suppose que $P = P_F$, c'est-à-dire que P est la projection orthogonale de H sur F.
Remarquons que F étant un sous-espace vectoriel fermé de H, c'est une partie convexe de H et donc la projection orthogonale sur F est bien définie.

On a vu en cours que P_F est 1-lipschitzienne, donc continue. Donc P est continue, et

$$\forall x, y \in H, \quad \|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$$

Donc en particulier (en prenant $y = 0$), $\|P\| \leq 1$.
De plus, si $x \in F \setminus \{0\}$, alors $\|P(x)\| = \|x\|$ et donc $\|P\| = 1$.

(ii)⇒(iii). On suppose que P est continue et que $\|P\| = 1$.
Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall x \in H, \quad |\langle P(x), x\rangle| \leq \|P(x)\|\|x\| \leq \|P\|\|x\|^2 = \|x\|^2$$

(iii)⇒(i). On suppose que $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in H$.
Soient $x, y \in H$ et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\langle P(x + \varepsilon y), x + \varepsilon y\rangle \leq \|x + \varepsilon y\|^2 = \langle x + \varepsilon y, x + \varepsilon y\rangle$$

Or P est linéaire, donc $\langle P(x + \varepsilon y), x + \varepsilon y\rangle = \langle P(x) + \varepsilon P(y), x + \varepsilon y\rangle$, d'où en développant

$$\langle P(x), x\rangle + \varepsilon\langle P(x), y\rangle + \varepsilon\langle P(y), x\rangle + \varepsilon^2\langle P(y), y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2\varepsilon\langle x, y\rangle + \varepsilon^2\langle y, y\rangle$$

Supposons maintenant $x \in F$. On a donc $P(x) = x$, d'où

$$\begin{gathered}\langle x, x\rangle + \varepsilon\langle x, y\rangle + \varepsilon\langle P(y), x\rangle + \varepsilon^2\langle P(y), y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2\varepsilon\langle x, y\rangle + \varepsilon^2\langle y, y\rangle \\ \textit{i.e. } \langle P(y), x\rangle + \varepsilon\langle P(y), y\rangle \leq \langle x, y\rangle + \varepsilon\langle y, y\rangle\end{gathered}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\langle P(y), x\rangle \leq \langle x, y\rangle$ i.e. $\langle P(y) - y, x\rangle \leq 0$.

On a montré : $\forall y \in H, x \in F, \quad \langle P(y) - y, x\rangle \leq 0$. Comme de plus $\forall y \in H, P(y) \in F$, on a exactement la caractérisation de la projection orthogonale P_F de H sur F, donc $P = P_F$.