TR 7 - Exercices 14 et 21 - Q3 (TD 4)

Baptiste PLANTIER, Ézéchiel JIMENEZ, Jules PIRONY

9 novembre 2022

Exercice 14. Soient H un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie, i.e.
$$\forall x \in H,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

(ii) u préserve le produit scalaire
$$\forall x, y \in H,\ \langle u(x)\,, u(y)\rangle = \langle x\,, y\rangle$$

(iii) $u^*u = \mathrm{Id}$

Indication : observer que, pour $x, y \in H$:

$$x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall z \in H,\ \langle x\,, z\rangle = \langle y\,, z\rangle$$

D'abord, démontrons l'indication.
Le sens direct est évident. Pour l'autre sens, on a :

$$\forall z \in H,\ \langle x\,, z\rangle = \langle y\,, z\rangle \quad \Longrightarrow \quad \forall z \in H,\ \langle x - y\,, z\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x - y\,, 0\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Maintenant montrons que $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$.

$\big[(i) \Longrightarrow (ii)\big]$ *Soient* $x, y \in H$. *Par l'identité de polarisation, on a :*

$$\begin{aligned}
\langle x\,, y\rangle &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2}{4} \\
&= \frac{\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 + i\|u(x-iy)\|^2 - i\|u(x+iy)\|^2}{4} && \textit{par hypothèse} \\
&= \frac{\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2 + i\|u(x)-iu(y)\|^2 - i\|u(x)+iu(y)\|^2}{4} && \textit{par linéarité de } u \\
&= \langle u(x)\,, u(y)\rangle
\end{aligned}$$

$\big[(ii) \Longrightarrow (iii)\big]$ *Soit* $x \in H$. *Par hypothèse, on a pour tout* $y \in H$ *:*

$$\langle x\,, y\rangle = \langle u(x)\,, u(y)\rangle = \langle u^*u(x)\,, y\rangle$$

Donc, d'après l'indication :
$$x = u^*u(x)$$

$\big[(iii) \Longrightarrow (i)\big]$ *Soit* $x \in H$. *On a directement par hypothèse :*

$$\langle u(x)\,, u(x)\rangle = \langle u^*u(x)\,, x\rangle = \langle x\,, x\rangle$$

D'où :
$$\|u(x)\| = \|x\|$$

Ainsi, on a bien $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii)$.

C.Q.F.D.

Exercice 21 - Question 3. Soit $H := L^2\big([0\,;1[, \mathcal{B}_{[0;1[}, \lambda_{[0;1[}\big)$. Pour $n \geq 0$, on considère :

$$E_n := \left\{ f : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \text{pour tout } 0 \leq j \leq 2^n - 1, f \text{ est constante sur } \left[\frac{j}{2^n}\,;\frac{j+1}{2^n}\right[\right\}$$

3. Soit E la fonction partie entière. Montrons que les fonctions définies par :

$$\forall k \geq 0, \forall I = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\} \subset \mathbb{N}^*$$
$$\forall x \in [0\,;1[, \quad w_I(x) = (-1)^{E(2^{n_1}x)}(-1)^{E(2^{n_2}x)}\cdots(-1)^{E(2^{n_k}x)}$$

(avec la convention $w_\varnothing = 1$) forment une base hilbertienne de H. C'est la *base de Walsh.*
Indication : pour $n \geq 1$, montrer que $\{w_I \ : \ \max I = n\}$ est une famille orthonormée contenue dans $E_n \ominus E_{n-1}$.

Posons :

$$\mathcal{F}_0 := \{w_\varnothing\} \text{ et pour tout } n \geq 1,\ \mathcal{F}_n := \{w_I \ : \ \max I = n\}, \quad (I \subset \mathbb{N}^* \text{ et fini}).$$

De plus, par convention, posons :

$$E_{-1} := \left\{0_{L^2([0;1[)}\right\}$$

D'après la question 1, on sait que les E_n vérifient les hypothèses de l'exercice 20.
Ainsi, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ est une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, il en découlera par l'exercice 20 que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est une base hilbertienne de H.

On procède alors en trois étapes :

(1) on montre que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est une famille orthonormé de H.

(2) on montre ensuite que $\# \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k = \dim(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) on finit par montrer, par récurrence, que $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k$ est une base de E_n et $\mathcal{F}_n$ une base de $E_n \ominus E_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n = \left\{w_I \ : \ I \subset \mathbb{N}^*, \text{ fini}\right\}$. Ainsi :

(1) D'abord, pour tout $I \subset \mathbb{N}^*$, fini, il vient directement que :

$$\|w_I\|_2 = \left(\int_0^1 \prod_{i\in I} (-1)^{2E(2^i x)}\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 1\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

et donc, par ailleurs, on a bien $w_I \in H$.

Maintenant, montrons l'orthogonalité. Soient $I, J \subset \mathbb{N}^*$, finis, $I \neq J$. Posons :

$$I' := I \backslash I \cap J \quad \text{et} \quad J' := J \backslash I \cap J$$

Remarquons alors que :

$$\langle w_I\,, w_J \rangle = \langle w_{I'}\,, w_{J'} \rangle$$

puisque pour tout $l \in I \cap J$, on a :

$$\forall x \in [0\,;1[, \quad w_I(x) w_J(x) = \prod_{\substack{i\in I\\ i\neq l}} (-1)^{E(2^i x)} \times \prod_{\substack{j\in J\\ j\neq l}} (-1)^{E(2^j x)} \times (-1)^{2E(2^l x)} = w_{I\backslash\{l\}}(x) w_{J\backslash\{l\}}(x)$$

On est donc ramené au cas $I \cap J = \varnothing$.

De plus, puisque l'on suppose $I \neq J$, *on a nécessairement* $I \neq \varnothing$ *ou* $J \neq \varnothing$. *On peut alors supposer sans perte de généralité que* $I \neq \varnothing$ *(et ainsi* $I \cup J \neq \varnothing$*). Posons :*

$$n := \max(I \cup J) \quad et \quad L := I \cup J \backslash \{n\}$$

On a alors :

$$\langle w_I \,, w_J \rangle = \langle w_L \,, w_{\{n\}} \rangle$$

Ainsi, si $n = 1$, *on a :*

$$\langle w_I \,, w_J \rangle = \langle w_{\{1\}} \,, w_{\varnothing} \rangle = \int_0^1 w_{\{1\}}(x)\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 -1\ dx = 0$$

Supposons maintenant $n \geq 2$. *On a alors :*

$$\max(L) \leq n-1$$

Donc, en particulier, w_L *est constante sur les* $\left[\dfrac{j}{2^{n-1}}\,;\dfrac{j+1}{2^{n-1}}\right[$ *pour* $0 \leq j \leq 2^{n-1}-1$.
En effet, soit $j \in [\![0\,;2^{n-1}-1]\!]$, *pour tout* $l \in L$, $\left[\dfrac{j}{2^{n-1}}\,;\dfrac{j+1}{2^{n-1}}\right[$ *est inclus dans un intervalle de la forme* $\left[\dfrac{p}{2^l}\,;\dfrac{p+1}{2^l}\right[$ *et* $(-1)^{E(2^l x)}$ *est constante sur* $\left[\dfrac{p}{2^l}\,;\dfrac{p+1}{2^l}\right[$.

Montrons alors que l'on a :

$$\forall j \in [\![0\,;2^{n-1}-1]\!], \quad I_j := \int_{\frac{j}{2^{n-1}}}^{\frac{j+1}{2^{n-1}}} w_{\{n\}}(x) w_L(x)\ dx = 0$$

Soit $j \in [\![0\,;2^{n-1}-1]\!]$. *On a montré que* w_L *est constante sur les* $\left[\dfrac{j}{2^{n-1}}\,;\dfrac{j+1}{2^{n-1}}\right[$. *Notons* c_j *cette constante. Alors :*

$$I_j = \int_{\frac{j}{2^{n-1}}}^{\frac{j+1}{2^{n-1}}} c_j w_{\{n\}}(x)\ dx$$

De plus, remarquons que :

$$\left[\frac{j}{2^{n-1}}\,;\frac{j+1}{2^{n-1}}\right[= \left[\frac{2j}{2^n}\,;\frac{2j+2}{2^n}\right[= \left[\frac{2j}{2^n}\,;\frac{2j+1}{2^n}\right[\sqcup \left[\frac{2j+1}{2^n}\,;\frac{2j+2}{2^n}\right[$$

Donc :

$$I_j = \int_{\frac{2j}{2^n}}^{\frac{2j+1}{2^n}} c_j w_{\{n\}}(x)\ dx + \int_{\frac{2j+1}{2^n}}^{\frac{2j+2}{2^n}} c_j w_{\{n\}}(x)\ dx$$

Or :

$$\forall l \in [\![0\,;2^n-1]\!], \forall x \in \left[\frac{l}{2^n}\,;\frac{l+1}{2^n}\right[, \quad w_{\{n\}}(x) = (-1)^l$$

D'où finalement :

$$I_j = \int_{\frac{2j}{2^n}}^{\frac{2j+1}{2^n}} c_j (-1)^{2j}\ dx + \int_{\frac{2j+1}{2^n}}^{\frac{2j+2}{2^n}} c_j (-1)^{2j+1}\ dx = \int_{\frac{2j}{2^n}}^{\frac{2j+1}{2^n}} c_j\ dx + \int_{\frac{2j+1}{2^n}}^{\frac{2j+2}{2^n}} -c_j\ dx = \frac{c_j}{2^n} - \frac{c_j}{2^n} = 0$$

Ainsi, il vient que :

$$\langle w_I \,, w_J \rangle = \langle w_{\{n\}} \,, w_L \rangle = \int_0^1 w_{\{n\}}(x) w_L(x)\ dx = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \int_{\frac{j}{2^{n-1}}}^{\frac{j+1}{2^{n-1}}} w_{\{n\}}(x) w_L(x)\ dx = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} I_j = 0$$

On a montré que pour tout $I, J \subset \mathbb{N}^*$, *finis,* $I \neq J$, $\|w_I\|_2 = 1$ *et* $\langle w_I \,, w_J \rangle = 0$.

Donc $\displaystyle\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ *est bien une famille orthonormé de* H.

(2) En remarquant que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k = \left\{w_I \ : \ I \subset [\![1\,;n]\!]\right\}$, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \# \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = \dim(E_n)$$

(3) Montrons par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \text{''} \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k \textit{ est une base de } E_n \textit{ et } \mathcal{F}_n \textit{ une base de } E_n \ominus E_{n-1}\text{''}$$

On a que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $\mathcal{F}_0 = \{w_\varnothing\}$ est bien une base de $E_0 = E_0 \ominus \left\{0_{L^2([0;1[)}\right\} = E_0 \ominus E_{-1}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k$ est une base de E_n. Or on a :

$$\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k \subset E_n \subset E_{n+1}$$

et (même argument que pour w_L) :

$$\mathcal{F}_{n+1} = \left\{w_I \ : \ \max I = n+1\right\} \subset E_{n+1}$$

De plus, on a :

$$\# \bigcup_{k=0}^{n+1} \mathcal{F}_k = \dim(E_{n+1})$$

Donc $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n+1} \mathcal{F}_k$ est une base de E_{n+1}.

Ensuite, $\mathcal{F}_{n+1}$ est une famille orthogonale à $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{F}_n$ donc $\mathcal{F}_{n+1} \subset E_{n+1} \ominus E_n$ et on a :

$$\#\mathcal{F}_{n+1} = \# \bigcup_{k=0}^{n+1} \mathcal{F}_k - \# \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k = \dim(E_{n+1}) - \dim(E_n) = \dim(E_{n+1} \ominus E_n)$$

Donc $\mathcal{F}_{n+1}$ est une base de $E_{n+1} \ominus E_n$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc, par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\mathcal{F}_n$ est une base de $E_{n+1} \ominus E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et ainsi $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est bien une base hilbertienne de H.

C.Q.F.D.