Analyse fonctionnelle

Alexandre Da Silva, Pierre Duluard, Yann Vernay

Feuille 4 - Exercice 19

Remarque Les questions 1 et 3 ont été traitées en TD. La question 1 montre le résultat suivant qui sera utilisé par la suite :

Soit $I \in \mathbb{R}$ un intervalle non-dégénéré et soit H un espace de Hilbert de fonctions sur I tel que l'espace des fonctions polynomiales sur I s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$, soit contenu dans H et soit dense dans H.
Si $(P_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormée de fonctions polynomiales telle que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(P_n) = n$, alors $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

Q.2. Dans cette question $H = L^2([-1,1], \mathscr{B}_{[-1,1]}, \lambda_{[-1,1]})$.

Montrons que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[-1,1]$ est inclus dans H et s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'intervalle $[-1,1]$ est fermée et P est continue, donc P est bornée sur $[-1,1]$, i.e. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1,1], |P(x)| \leq M$. On a alors $\int_{-1}^{1} |P(x)|^2 dx \leq 2M^2$, donc $P \in H$.
De plus, si $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} |P(x)|^2 dx = 0$, on a alors $P = 0$ p.p. sur $[-1,1]$, donc $P = 0$, d'où l'identification.

Montrons que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans H.
Soit $f \in H$ et $\epsilon > 0$.
L'ensemble $\mathscr{C}_c^\infty(]-1,1[)$ est dense dans $L^2(]-1,1[)$, donc il existe $\tilde{g} \in \mathscr{C}_c^\infty(]-1,1[)$ telle que $||f - \tilde{g}||_{L^2(]-1,1[)} \leq \frac{\epsilon}{2}$.
En notant $g \in \mathscr{C}^0([-1,1])$ le prolongement par continuité de $\tilde{g}$ à $[-1,1]$,
on obtient $||f - g||_{L^2([-1,1])} = ||f - g||_{L^2(]-1,1[)} \leq \frac{\epsilon}{2}$.
La fonction g est continue sur $[-1,1]$, donc par le théorème de Weierstrass on peut approcher g par un polynôme, i.e. il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $||g - P||_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon$.
On a alors $||g - P||_{L^2([-1,1])} \leq \sqrt{2}||g - P||_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Finalement, on a $||f - P||_{L^2([-1,1])} \leq ||f - g||_{L^2([-1,1])} + ||g - P||_{L^2([-1,1])} \leq \epsilon$, d'où $\mathbb{R}[X]$ dense dans H.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(P_n) = n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$, donc sa dérivée $n^{ième}$ est de degré n, d'où $deg(P_n) = n$.

Montrons que la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$.
Remarquons que -1 et 1 sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n = (X+1)^n(X-1)^n$. On a donc pour $1 \leq i \leq m+1$, $\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}((x^2-1)^n)(\pm 1) = 0$, donc $[\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}((x^2-1)^n)\frac{d^{m+i-1}}{dx^{m+i-1}}((x^2-1)^m)]_{-1}^{1} = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
< P_n, P_m > &= \alpha_n\alpha_m \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)dx \\
&= \alpha_n\alpha_m[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)]_{-1}^{1} - \alpha_n\alpha_m \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}((x^2-1)^m)dx \\
&= -\alpha_n\alpha_m \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}((x^2-1)^m)dx \\
&= (-1)^{m+1}\alpha_n\alpha_m \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}((x^2-1)^n)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}((x^2-1)^m)dx \text{ par IPP successives} \\
&= 0 \text{ car } deg((X^2-1)^m) = 2m
\end{aligned}$$

Les $(P_n)_{n\geq 0}$ étant normées, ils forment une famille orthonormée de H.

Finalement, la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ est donc une base hilbertienne de H.

Q.4. Dans cette question $H = L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu)$ avec ν de densité $e^{-x^2/2}$.

Montrons que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ est inclus dans H et s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par croissance comparée, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |P|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2 e^{-x^2/2}dx$ converge, donc $P \in H$.
De plus, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_{\mathbb{R}} |P|^2 d\nu = 0$, on a alors $\int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2 e^{-x^2/2}dx = 0$, donc $P = 0$ p.p. Or P est continue, donc $P = 0$.

Montrons que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans H.
Soit $h \in \mathbb{R}[X]^{\perp}$. On a $h \in H$, donc $\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 e^{-x^2/2}dx < \infty$.
On pose alors $g : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x)e^{-x^2/4}$. On a $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 e^{-x^2/2}dx < \infty$, donc $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.
De plus, $h \in \mathbb{R}[X]^{\perp}$, donc $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{\mathbb{R}} hP d\nu = 0$, i.e. $\int_{\mathbb{R}} g(x)P(x)e^{-x^2/4}dx = 0$.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} x^n g(x)e^{-x^2/4}dx = 0$, donc d'après l'exercice 18, $g = 0$ p.p., donc $h = 0$ dans H.
Donc $\mathbb{R}[X]^{\perp} = \{0\}$, d'où $\mathbb{R}[X]$ dense dans H.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, deg(R_n) = n$.
On a $R_0 = \gamma_0$, donc $deg(R_0) = 0$.
Supposons $deg(R_n) = n$ pour $n \geq 0$.
On a alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
R_n'(x) &= (-1)^n \gamma_n x e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) + (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2/2}) \\
&= xR_n(x) - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Donc $R_{n+1} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}(XR_n - R_n')$.
Or par hypothèse, $deg(R_n) = n$, donc $deg(XR_n) = n+1$ et $deg(R_n') = n-1$.
D'où $deg(R_{n+1}) = n+1$.

Montrons que la famille $(R_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$.
Remarquons que pour $1 \leq i \leq m+1, \exists Q_i \in \mathbb{R}[X], \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^{-x^2/2}) = Q_i(x)e^{-x^2/2} \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée et donc toujours par croissance comparée, $[R_m^{(i-1)}(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^{-x^2/2})]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
< R_n, R_m > &= \int_{\mathbb{R}} R_n(x) R_m(x) e^{-{}^2/2} dx \\
&= (-1)^n \gamma_n \int_{\mathbb{R}} R_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) dx \\
&= (-1)^n \gamma_n [R_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2/2})]_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^n \gamma_n \int_{\mathbb{R}} R'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2/2}) dx \\
&= (-1)^{n+1} \gamma_n \int_{\mathbb{R}} R'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2/2}) dx \\
&= (-1)^{n+m+1} \gamma_n \int_{\mathbb{R}} R_m^{(m+1)}(x) \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(e^{-x^2/2}) dx \text{ par IPP successives} \\
&= 0 \text{ car } R_m^{(m+1)} = 0
\end{aligned}
$$

Les $(R_n)_{n \geq 0}$ étant normées, ils forment une famille orthonormée de H.

Finalement, la famille $(R_n)_{n \geq 0}$ est donc une base hilbertienne de H.