Analyse Fonctionnelle 1 – TT17 – Feuille 5, Exercice 3

Jérémie Klingler, Malo Chabanat--Lebeault, Antoine Merlin

Soient $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$.

1. Montrons que $f * \varphi$ est défini en tout point.

Posons $g : (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2 \mapsto \varphi(y) f(x - y)$. Comme $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$, il existe un compact K de $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n \smallsetminus K$. Ainsi, $g(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n \smallsetminus K$. Fixons $x \in \mathbf{R}^n$. L'application $y \mapsto g(x, y)$ est continue sur $\mathbf{R}^n$ et nulle en dehors du compact K : elle est donc bornée donc intégrable sur K et

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_K g(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Ceci assure alors que $(f * \varphi)(x)$ est bien défini.

2. & **3.** Montrons que $f * \varphi \in \mathcal{C}^k$ et que pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.

Il faut ici appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

i) Soit $x \in \mathbf{R}^n$. La fonction $y \mapsto g(x, y)$ est bien intégrable d'après la question précédente.

ii) Soit $y \in \mathbf{R}^n$. La fonction $x \mapsto g(x, y) = \varphi(y) f(x - y)$ est $\mathcal{C}^k$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^k$.

iii) Soient ∂^α une dérivée partielle d'ordre $\leq k$ et B une boule fermée de $\mathbf{R}^n$. Soient $x \in B$ et $y \in K$. On a

$$|\partial^\alpha g(x, y)| = |\varphi(y) \partial^\alpha f(x - y)| \leq |\varphi(y)| \cdot M,$$

où $M := \sup_{(x,y) \in B \times K} |\partial^\alpha f(x - y)|$. En effet, la fonction $(x, y) \mapsto \partial^\alpha f(x - y)$ est continue sur le compact $B \times K$ donc bornée.
Par ailleurs, $\partial^\alpha g(x, y) = 0$ pour $y \in \mathbf{R}^n \smallsetminus K$. Ainsi,

$$\forall (x, y) \in B \times \mathbf{R}^n, \quad |\partial^\alpha g(x, y)| \leq M \cdot |\varphi(y)|$$

qui est intégrable et indépendante de x.

Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres assure alors que $f * \varphi \in \mathcal{C}^k$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \partial^\alpha g(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y) \partial^\alpha f(x - y)\,\mathrm{d}y = (\partial^\alpha f * \varphi)(x).$$

Ainsi, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.

4. On suppose ici que f est une fonction polynomiale de n variables de degré $\leq m$. Ainsi, pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\geq m + 1$, $\partial^\alpha f = 0$.
Considérons une dérivée partielle ∂^α d'ordre $\geq m + 1$. Alors on a d'après la question précédente : $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi = 0 * \varphi = 0$. Ainsi, $f * \varphi$ est polynomiale de degré $\leq m$.

En effet, la formule de Taylor assure alors que pour $x \in \mathbf{R}^n$, il existe $c \in [0, x]$ tel que

$$(f * \varphi)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha(f * \varphi)(0) x^\alpha + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| = m+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha(f * \varphi)(c) x^\alpha}_{=0},$$

ce qui assure que $f * \varphi$ est une fonction polynomiale de degré $\leq m$.