Fanny LAPALUS
Chloé LUTZ
Benjamin MARCOUX

Travail en trinôme

Exercice 6 TD 5

Question 1)

On suppose que le résultat est vrai sur les compacts.

Soient $A, B \in B_{\mathbb{R}^n}$ tels que $\lambda_n(A) > 0$ et $\lambda_n(B) > 0$

Par régularité de la mesure de Lebesgue,

$\lambda_n(A) = \sup_{C \,\text{compact}, C \subset A} \lambda_n(C) > 0$ donc il existe K compact, $K \subset A$ tel que $\lambda_n(K) > 0$

De même, il existe L compact avec $L \subset B$ tel que $\lambda_n(L) > 0$

Puisque le résultat est supposé vrai sur les compacts, il existe une boule ouverte D non vide dans K + L $\subset A + B$

Question 2)

Nous pouvons supposer A et B compacts donc fermés bornés.

D'où $\lambda_n(A) < \infty$ et $\lambda_n(B) < \infty$ ce qui nous donne l'appartenance de la fonction caractéristique de ces ensembles à L^2.

On peut donc considérer le produit de convolution comme étant $\mathcal{X}_A * \mathcal{X}_B$ avec chacune des fonctions dans L^2 d'où la continuité (car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{r}$ avec $r = \infty$)

Question 3)

On a :

$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A * \mathcal{X}_B(x) \mathrm{dx}$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A(x - y) \mathcal{X}_B(y) \mathrm{dydx}$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A(x - y) \mathrm{dx}\, \mathcal{X}_B(y) \mathrm{dy}$ (Théorème de Tonelli car $\mathcal{X}_A$ et $\mathcal{X}_B$ sont positives et intégrables)

$= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n(A) \mathcal{X}_B(y) \mathrm{dy}$

$= \lambda_n(A) \lambda_n(B) \neq 0$ et $\lambda_n(A) \lambda_n(B) < \infty$

D'où $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{dx}$ n'est pas nulle. D'où f n'est pas la fonction identiquement nulle (car f positive).

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{dx} \neq 0$ et $f \geqslant 0$

Donc $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) > 0$

$\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A(y - z) \mathcal{X}_B(z) \mathrm{dz} > 0$

Or $\mathcal{X}_A \mathcal{X}_B \geqslant 0$ donc

$\exists z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{X}_A(y - z) \mathcal{X}_B(z) > 0$

D'où $y - z \in A$ et $z \in B$

Donc $y \in A + z$ et $z \in B$

Donc $y \in A + B$

Par continuité de f en y, en prenant $\varepsilon = \frac{f(y)}{2}$

$\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{f(y)}{2}$ ce qui implique $f(x) > 0$

$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A(x - y)\mathcal{X}_B(y)\mathrm{dy} > 0$

Donc $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - y \in A$ et $y \in B$

Ceci implique que $x \in A + B$

Nous avons donc bien $B(y, \delta) \subset A + B$ donc $A + B$ contient une boule ouverte non vide.