Analyse fonctionnelle

Alexandre Da Silva, Pierre Duluard, Yann Vernay

Feuille 5 - Exercice 28

Remarque Pour les questions 1 à 3, on se place dans le cadre plus général d'un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et on considère une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable.

Q.1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable.
Pour $t > 0$, on note $E_f(t) = \{x \in X, |f(x)| > t\}$. On a alors $F_f(t) = \mu(E_f(t))$.
On remarque que pour $0 < t < s$, on a $E_f(s) \subset E_f(t)$, donc $F_f(s) \leq F_f(t)$.
La fonction F_f est alors décroissante, donc mesurable.

Q.2. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $p \geq 1$.

Cas où μ est σ-finie :

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty t^{p-1}F_f(t)dt &= p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_n(E_f(t))dt \\
&= p\int_0^\infty t^{p-1}\int_X \chi_{E_f(t)}(x)d\mu dt \\
&= p\int_X\int_0^\infty t^{p-1}\chi_{E_f(t)}(x)dtd\mu \text{ par Tonelli car } t^{p-1}\chi_{E_f(t)}(x) \geq 0 \text{ et } \mu\ \sigma\text{-finie} \\
&= p\int_X\int_0^{|f(x)|} t^{p-1}dtd\mu \text{ car } \chi_{E_f(t)}(x) = 0 \text{ pour } t \geq |f(x)| \\
&= \int_X |f(x)|^p dx = ||f||_p^p
\end{aligned}$$

Cas général :
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. On remarque que $F_f = F_{|f|}$, donc on peut supposer f positive sans perte de généralité.

Commençons par démontrer le résultat pour $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée positive.
Il existe alors $A_0, A_1, ..., A_n$ des éléments de $\mathscr{T}$ deux à deux disjoints (d.d.d.) et des réels strictement positifs $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$ telle que $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
||f||_p^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu \\
&= \int_X \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^p \chi_{A_k}(x)d\mu \text{ car les } (A_k)_{0\leq k\leq n} \text{ sont d.d.d.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^p \mu(A_k)
\end{aligned}$$

Si il existe $i \in \{0, 1, ...n\}$ tel que $\mu(A_i) = +\infty$, alors $||f||_p^p = +\infty$.
Dans ce cas, pour $0 < t < \lambda_i, F_f(t) = +\infty$ et donc $p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt \geq p\int_0^{\lambda_i} t^{p-1}F_f(t) = +\infty$.
Finalement, on a $||f||_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt = +\infty$.

Sinon, $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}, \mu(A_i) < +\infty$.
On a alors pour $0 < t < \lambda_0, F_f(t) = \mu(\bigcup\limits_{j\geq 0} A_j)$ et si $i \in \{0, ..., n-1\}$ et $\lambda_i \leq t < \lambda_{i+1}$, alors $F_f(t) = \mu(\bigcup\limits_{j\geq i+1} A_j)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt &= p\int_0^{\lambda_0} t^{p-1}F_f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} p\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} t^{p-1}F_f(t)dt \text{ car } F_f(t) = 0 \text{ pour } t \geq \lambda_n \\
&= p\int_0^{\lambda_0} t^{p-1}\mu(\bigcup_{j\geq 0} A_j)dt + \sum_{k=0}^{n-1} p\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} t^{p-1}\mu(\bigcup_{j\geq k+1} A_j)dt \\
&= \lambda_0^p\mu(\bigcup_{j\geq 0} A_j) + \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}^p - \lambda_k^p)\mu(\bigcup_{j\geq k+1} A_j)dt \\
&= \lambda_0^p\mu(\bigcup_{j\geq 0} A_j) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\mu(\bigcup_{j\geq k} A_j) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^p\mu(\bigcup_{j\geq k+1} A_j)) \\
&= \lambda_0^p\mu(\bigcup_{j\geq 0} A_j) + \lambda_n^p\mu(\bigcup_{j\geq n} A_j) - \lambda_0^p\mu(\bigcup_{j\geq 1} A_j) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^p[\mu(\bigcup_{j\geq k} A_j) - \mu(\bigcup_{j\geq k+1} A_j)] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^p\mu(A_k) \text{ car } \mu(\bigcup_{j\geq k} A_j) - \mu(\bigcup_{j\geq k+1} A_j) = \mu(A_k) \text{ comme les } (A_k) \text{ sont d.d.d.}
\end{aligned}$$

D'où $||f||_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt$.

On considère désormais $f : X \mapsto \mathbb{R}$ mesurable positive.
Il existe alors $(f_j)_{j\geq 0}$ une suite croissante de fonctions étagées positives telle que $f_j \to f$ simplement.

D'une part, par convergence monotone, on a $\int_X |f_j|^p \to \int_X |f|^p$, i.e. $||f_j||_p^p \to ||f||_p^p$.

D'autre part, soit $t > 0$.
Pour $k > l$, on a $\forall x \in X, f_k(x) > f_l(x)$ et donc $E_{f_l}(t) \subset E_{f_k}(t)$, ce qui montre que la suite $(E_{f_j}(t))_{j\geq 0}$ est croissante.

Montrons alors que $\bigcup\limits_{j\geq 0} E_{f_j}(t) = E_f(t)$.
On a $\forall j \geq 0, f_j \leq f$, donc $E_{f_j} \subset E_f(t)$, d'où $\bigcup\limits_{j\geq 0} E_{f_j}(t) \subset E_f(t)$.
Soit $x \in E_f(t)$, i.e. $|f(x)| = f(x) > t$ (car f positive).
On a $f_j(x) \to f(x)$, donc pour $0 < \epsilon < f(x) - t$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geq j_0, |f_j(x) - f(x)| \leq \epsilon$.
Donc $f(x) - f_{j_0}(x) \leq \epsilon < f(x) - t$, i.e. $f_{j_0}(x) > t$.
Donc $x \in E_{f_{j0}}(t)$ i.e. $E_f(t) \subset E_{f_{j_0}(t)\subset \bigcup\limits_{j\geq 0} E_{f_j}(t)}$.
D'où $\bigcup\limits_{j\geq 0} E_{f_j}(t) = E_f(t)$.

On obtient donc $\mu(E_{f_j}(t)) \to \mu(E_f(t))$, i.e. $F_{f_j}(t) \to F_f(t)$, d'où $F_{f_j} \to F_f$ simplement.
La suite $(F_j)_{j\geq 0}$ est de plus croissante, donc $(t \mapsto t^{p-1}F_{f_j}(t))_{j\geq 0}$ également et $\forall t > 0, t^{p-1}F_{f_j}(t) \to t^{p-1}F_f(t)$.
Par convergence monotone, on a alors $p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_{f_j}(t)dt \to p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt$.

Finalement, $\forall j \geq 0, ||f_j||_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_{f_j}(t)dt$ (car les $(f_j)_{j\geq 0}$ sont étagées) avec

- $||f_j||_p^p \to ||f||_p^p$
- $p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_{f_j}(t)dt \to p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt$

Donc par unicité de la limite, $||f||_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_f(t)dt$.

Q.3. Soit $t>0$, on a

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu \\ &\geq \int_{E_f(t)} |f(x)|^p d\mu \\ &\geq \int_{E_f(t)} t^p d\mu \text{ car } |f(x)|>t \text{ pour } x\in E_f(t) \\ &\geq F_f(t)t^p \end{aligned}$$

D'où $F_f(t) \leq \frac{||f||_p^p}{t^p}$.

Q.4. Soit $f\in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ non nulle et $r\geq 1$.
Si $||f||_r^r = 0$, alors $f=0$ p.p. et par continuité $f=0$, ce qui est impossible car on a supposé f non nulle. D'où $||f||_r^r>0$.
Soit $K=supp(f)$. Par continuité de f sur K compact, il existe $M>0$ tel que $\forall x\in K, |f(x)|\leq M$.
On a alors $||f||_r^r = \int_K |f(x)|^r dx \leq M^r\lambda_n(K) < +\infty$.
Finalement, on a bien $0<||f||_r^r<+\infty$.

Q.5.a) Soit $a>0$.
On pose $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $k(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t|\leq a \\ a & \text{si } t>a \\ -a & \text{si } t<a \end{cases}$, qui est clairement continue. On peut alors remarquer que $g_a = k\circ f$, qui est donc continue par composée.
On note encore $K=supp(f)$. Pour $x\in\mathbb{R}^n\setminus K, f(x)=0$, donc $g_a(x) = k(f(x)) = k(0) = 0$. On a alors $supp(g_a)\subset supp(f)$, donc $g_a\in\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
On peut ensuite remarquer que $f = g_a+h_a$ (donc $h_a = f-g_a$), et donc $h_a\in\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (car c'est un espace vectoriel).

b) On rappelle que pour $t>0$, on note $E_f(t) = \{x\in\mathbb{R}^n, |f(x)|>t\}$.
Soit $t>0$. Si $t\leq a$, alors $|g(x)|>t$ ssi $|f(x)|>t$, donc $E_g(t) = E_f(t)$ et si $t>a$, alors $\forall x\in\mathbb{R}^n, |g(x)|<t$, donc $E_g(t)=\emptyset$.
On en déduit que $F_{g_a}(t) = \begin{cases} F_f(t) & \text{si } t\leq a \\ 0 & \text{si } t>a \end{cases}$ et on a alors

$$||g_a||_2^2 = 2\int_0^\infty tF_{g_a}(t)dt = 2\int_0^a tF_f(t)dt$$

Soit $t>0$.

$$\begin{aligned} |h(x)|>t &\text{ ssi } f(x)-a>t \text{ ou } f(x)+a<-t \\ &\text{ ssi } f(x)>t+a \text{ ou } f(x)<-t-a \\ &\text{ ssi } |f(x)|>t+a \end{aligned}$$

On en déduit que $F_{h_a}(t) = F_f(t+a)$ et on a alors

$$||h_a||_1 = \int_0^\infty F_{h_a}(t)dt = \int_0^\infty F_f(t+a)dt = \int_a^\infty F_f(t)dt$$

c) Pour $p \geq 1$ et $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}
||f||_p^p &= p\int_0^{\infty} t^{p-1}F_f(t)dt \\
&\geq p\int_a^{\infty} t^{p-1}F_f(t)dt \\
&\geq pa^{p-1}\int_a^{\infty} F_f(t)dt \text{ car } t \mapsto t^{p-1} \text{ est croissante} \\
&\geq pa^{p-1}||h_a||_1
\end{aligned}$$

D'où $||h_a||_1 \leq \frac{1}{pa^{p-1}}||f||_p^p$.

d) Pour $t > 0$, on note $a(t)$ la solution positive de $\frac{1}{pa^{p-1}}||f||_p^p = \frac{t}{2}$.
Soit $t > 0$ et $a = a(t)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
|\hat{h_a}(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}h_a(x)dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h_a(x)|dx \\
&\leq ||h_a||_1 \\
&\leq \frac{1}{pa^{p-1}}||f||_p^p \\
&\leq \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Pour $a > 0$, on a $f = g_a + h_a$ donc par linéarité de la transformée de Fourier, $\hat{f} = \hat{g_a} + \hat{h_a}$.
Soit $t > 0$ et $a = a(t)$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\hat{f}(\xi)| > t$. On a alors

$$|\hat{g_a}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{h_a}(\xi)| \geq |\hat{f}(\xi)| - |\hat{h_a}(\xi)| > t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$$

D'où $\{\xi \in \mathbb{R}^n, |\hat{f}(\xi) > t\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, |\hat{g_a}(\xi) > \frac{t}{2}\}$ et donc $F_{\hat{f}}(t) \leq F_{\hat{g_a}}(\frac{t}{2})$.

Q.6. Dans cette question on notera pour $t > 0, a = a(t)$.
Soit $1 < p < 2$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $f \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
||\hat{f}||_q^q &= q\int_0^{\infty} t^{q-1}F_{\hat{f}}(t)dt \\
&\leq q\int_0^{\infty} t^{q-1}F_{\hat{g_a}}(\frac{t}{2})dt \text{ d'après 5.d)} \\
&\leq 4q\int_0^{\infty} t^{q-3}||\hat{g_a}||_2^2 dt \text{ d'après l'inégalité de Markov} \\
&\leq 4(2\pi)^n q\int_0^{\infty} t^{q-3}||g_a||_2^2 dt \text{ d'après le théorème de Plancherel} \\
&\leq 8(2\pi)^n q\int_0^{\infty} t^{q-3}\int_0^a sF_f(s)dsdt \text{ d'après 5.b)} \\
&\leq 8(2\pi)^n q\int_0^{\infty}\int_0^a t^{q-3}sF_f(s)dsdt
\end{aligned}$$

Or pour $t, s > 0$, $t^{q-3}sF_f(s) \geq 0$, donc on peut appliquer Tonelli.

De plus, $a = (\frac{2}{p})^{\frac{1}{p-1}}||f||_p^{\frac{p}{p-1}}t^{\frac{-1}{p-1}}$, donc $s \leq a$ ssi $t \leq \frac{2}{p}||f||_p^p s^{1-p}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
||\hat{f}||_q^q &\leq 8(2\pi)^n q \int_0^\infty \int_0^{\frac{2}{p}||f||_p^p s^{1-p}} t^{q-3} s F_f(s) dt ds \\
&\leq 8(2\pi)^n q \int_0^\infty s F_f(s) [\frac{t^{q-2}}{q-2}]_0^{\frac{2}{p}||f||_p^p s^{1-p}} ds \text{ car } q > 2 \\
&\leq 8(2\pi)^n \frac{q}{q-2} (\frac{2}{p})^{q-2} ||f||_p^{p(q-2)} \int_0^\infty s F_f(s) s^{(1-p)(q-2)} ds \\
&\leq 8(2\pi)^n \frac{q}{q-2} (\frac{2}{p})^{q-2} ||f||_p^{p(q-2)} \int_0^\infty s^{p-1} F_f(s) ds \text{ car } (1-p)(q-2)+1 = p-1 \\
&\leq 8(2\pi)^n \frac{q}{p(q-2)} (\frac{2}{p})^{q-2} ||f||_p^{p(q-2)+p} \\
&\leq 8(2\pi)^n \frac{q-1}{q-2} (\frac{2}{p})^{q-2} ||f||_p^q \text{ car } p(q-2)+p = q
\end{aligned}$$

D'où $||\hat{f}||_q \leq C_p ||f||_p$ avec $C_p = 2^{\frac{q+1}{q}} (2\pi)^{\frac{n}{q}} (\frac{q-1}{q-2})^{\frac{1}{q}} p^{\frac{2-q}{q}}$.

Q.7. La transformée de Fourier est une application $\mathscr{F}$ définie sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. L'objectif de cette question est de prolonger cette application aux espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < 2$.

Soit $f \in L^1 \cap L^p$.
Il existe $(f_j)_{j \geq 0}$ une suite de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_j \to f$ dans L^1 et L^p.
On a alors $||\hat{f}_j - \hat{f}_i||_q \leq C_p ||f_j - f_i||_p \underset{i,j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(\hat{f}_j)_{j \geq 0}$ est une suite de Cauchy de L^q complet, donc il existe $h \in L^q$ telle que $\hat{f}_j \longrightarrow h$ dans L^q. Il existe alors une extraction φ telle que $\hat{f}_{\varphi(j)} \longrightarrow h$ p.p.
D'autre part, $\hat{f}_j \longrightarrow \hat{f}$ dans L^1 par continuité de $\mathscr{F}$ (et donc $\hat{f}_{\varphi(j)} \longrightarrow \hat{f}$ dans L^1). Donc il existe une nouvelle extraction ψ telle que $\hat{f}_{\psi(j)} \longrightarrow \hat{f}$ p.p.
Finalement $\hat{f}_{\psi(j)} \longrightarrow h$ p.p. et $\hat{f}_{\psi(j)} \longrightarrow \hat{f}$ p.p., donc $\hat{f} = h$ p.p.
On peut alors passer a la limite lorsque $j \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité $||\hat{f}_{\psi(j)}||_q \leq C_p ||f_{\psi(j)}||_p$, ce qui donne $||\hat{f}||_q \leq C_p ||f||_p$.

Montrons désormais qu'il est possible de prolonger $\mathscr{F}$ à tout L^p.
On sait que

- $L^1 \cap L^p$ est un s.e.v. de L^p dense dans L^p.
- $\mathscr{F} : L^1 \cap L^p \to L^q$ est linéaire continue (pour $L^1 \cap L^2$ muni de la norme p).

On en déduit que $\mathscr{F}$ admet une unique extension continue de L^p vers L^q, que l'on notera encore $\mathscr{F}$.