Analyse fonctionnelle

Transformée de Fourier, distributions tempérées

Maxime Bidoli, Julien Lemetayer, Saliou Cisse, Alexandre Payet

Exercice 1. *Familles régularisantes*

Une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est régularisante si :

(i) $\rho_\varepsilon \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

(iii) $\rho \geq 0$.

(iv) Pour tout $\delta > 0$ et $R > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} \rho_\varepsilon(x)\,dx < \delta, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

1. Soit $\rho \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. Soit $\rho_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Montrons point par point que la famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est régularisante.

Démonstration. (i) Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\varepsilon} \end{array}$$

alors Φ est un C^1-difféomorphisme. On a alors $\rho_\varepsilon(x) = \rho \circ \Phi |J_\Phi|$. Si ρ est intégrable, alors $\rho \circ \Phi |J_\Phi|$ est intégrable aussi. On en déduit alors que $\rho_\varepsilon(x)$ est intégrable et donc que $\rho_\varepsilon \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Cette propriété découle du changement de variable donné en (i) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})\,dx \\ \text{par (i)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\rho \circ \Phi|J_\Phi|)(x)\,dx \\ &= \int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} \rho(x)\,dx = 1. \end{aligned}$$

(iii) On a $\rho \geq 0$ donc $\rho_\varepsilon \geq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(iv) Soit $\delta > 0$. Posons $f_k(x) = \rho(x)\mathbb{1}_{B(0,k)}(x)$ et donc f_k est croissante. Par ailleurs, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \int_{B(0,k)} \rho(x)\,dx$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx \\ \Leftrightarrow &\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\mathbb{1}_{B(0,k)}(x)\,dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx \\ \Leftrightarrow &\int_{B(0,k)} \rho(x)\,dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx \end{aligned}$$

On a alors que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k)} \rho(x)\, dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, il existe donc un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k_0)} \rho(x)\, dx < \delta$.

On a par changement de variable

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\frac{R}{\varepsilon})} \rho(x)\, dx.$$

Posons $\varepsilon_0 = \dfrac{R}{k_0}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho_{\varepsilon_0}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k_0)} \rho(x)\, dx < \delta.$$

Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\frac{R}{\varepsilon})} \rho(x)\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\frac{R}{\varepsilon_0})} \rho(x)\, dx \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

La famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est donc bien régularisante. □

2. Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante. Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ et $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, montrons que $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Puisque f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ et qu'elle est nulle à l'infini, on a d'après le théorème de Heine que f est uniformément continue. Il existe donc $R > 0$ tel que

$$|z - x| < R \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

On sait de plus que $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille régularisante. Il existe un ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho_\varepsilon(y)\, dy < \frac{\delta}{4\,\|f\|_\infty}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
|(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) f(x)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\, |f(x-y) - f(x)|\, dy.
\end{aligned}$$

Et on a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y)-f(x)|\,dy = \int_{B(0,R)} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y)-f(x)|\,dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y)-f(x)|\,dy.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y)-f(x)|\,dy &\leq \frac{\delta}{2}\int_{B(0,R)} \rho_\varepsilon(x)\,dx + \frac{\delta}{4\,\|f\|_\infty} 2\,\|f\|_\infty \\ &\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta.\end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$. □

⋆

Exercice 2. *Convergence simple*

Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante. Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, montrons que $f * \rho_\varepsilon \to f$ simplement sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}f * \rho_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\frac{y}{\varepsilon})\rho(\frac{y}{\varepsilon})\,dy\end{aligned}$$

et en prenant

$$\begin{array}{rccc}\Phi & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\varepsilon}\end{array}$$

un C^1-difféomorphisme et $h(z) = f(x-\varepsilon z)$. On a part le théorème de changement de variable

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\frac{y}{\varepsilon})\rho(\frac{y}{\varepsilon})\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n} (h\rho)\circ\Phi|J_\Phi|(y)\,dy \\ &= \int_{\Phi(\mathbb{R}^n)} h(z)\rho(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon z)\rho(z)\,dz.\end{aligned}$$

On a de plus que $|f(x-\varepsilon z)\rho(z)| \leq \rho(z)\,\|f\|_\infty$. Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on a donc

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon z)\rho(z)\,dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho(z)\,dz \\
&= f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\,dz \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

$\square$

$\star$