Analyse Fonctionnelle 1 - TT4

Julien Fombaron, Pierre Gueugneau, Simon Portal

1er octobre 2022

Feuille 2 : Ex 5.1. (Inégalité de Clarkson)

Soit p un réel tel que $p \geq 2$. On montre l'inégalité de Clarkson, valable pour toutes fonctions mesurables f et g de $(X, \mathscr{T}, \mu)$:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p$$

On commence par établir quelques inégalités intermédiaires sur les réels.

(a) Soient $r \geq 1$ et $\alpha, \beta \geq 0$. On a

$$(\alpha+\beta)^r = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^{r-1} = \alpha(\alpha+\beta)^{r-1} + \beta(\alpha+\beta)^{r-1}$$

Or $\alpha+\beta \geq \alpha$, $\alpha+\beta \geq \beta$, et $r-1 \geq 0$, d'où

$$(\alpha+\beta)^r \geq \alpha\alpha^{r-1} + \beta\beta^{r-1} = \alpha^r + \beta^r \tag{1}$$

De plus, l'application $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^r$ est convexe car $r \geq 1$, d'où par l'inégalité de Jensen

$$\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)^r \leq \frac{1}{2}\alpha^r + \frac{1}{2}\beta^r \tag{2}$$

(b) Soient $x, y \geq 0$. Comme $p \geq 2$, on a $\frac{p}{2} \geq 1$ d'où par (1) :

$$x^p + y^p = (x^2)^{\frac{p}{2}} + (y^2)^{\frac{p}{2}} \leq \left(x^2+y^2\right)^{\frac{p}{2}} \tag{3}$$

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Par (3), on a

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\frac{1}{4}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right)\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

Puis par (2) :

$$\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2}(a^2)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2}(b^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p$$

Ainsi on a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p \tag{4}$$

(d) On peut maintenant montrer l'inégalité de Clarkson.
Soient f et g des fonctions mesurables sur $(X, \mathscr{T}, \mu)$. On a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p = \int_X \left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p d\mu(x)$$

Or d'après (4) :

$$\forall x \in X, \left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p$$

Les intégrandes étant mesurables positives, on en déduit

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \int_X \frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p d\mu(x) = \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p$$

(e) On peut appliquer cette inégalité pour montrer le résultat suivant :
Si $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de $L^p(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que :

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j\|_p = l < \infty,$$

$$\lim_{j,k\to\infty} \left\|\frac{f_j+f_k}{2}\right\|_p = l$$

Alors $(f_j)_{j\geq 1}$ converge dans L^p.
Remarquons qu'ici les f_j doivent être dans L^p puisque on demande qu'elles soient de norme p finie.

Par la question précédente, on a

$$\left\|\frac{f_j-f_k}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f_j\|_p^p + \frac{1}{2}\|f_k\|_p^p - \left\|\frac{f_j+f_k}{2}\right\|_p^p \longrightarrow \frac{1}{2}l^p + \frac{1}{2}l^p - l^p = 0$$

quand $j,k \to \infty$. Ainsi $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Cauchy de L^p, qui est complet, donc $(f_j)_{j\geq 1}$ converge dans L^p.