Compte Rendu d'exercice en Analyse Fonctionnelle Trinôme 6 : Master M1 de Mathématiques Générales

Maxime Bidoli, Julien Lemetayer, Saliou Cissé, Alexandre Payet

12 octobre 2022

1 Exercice 6 de la feuille 3 du TD d'Analyse Fonctionnelle

Soit une fonction f définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Supposons que f soit α-Holderienne pour $\alpha > 1$ c'est-à-dire qu'il existe $0 < C < +\infty$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. Prenons l'application ω définie par :

$$\omega : \begin{cases}]0, +\infty[\to [0, +\infty] \\ t \mapsto t^{\alpha} \end{cases}$$

On a bien dans ce cas, pour $\alpha > 1$, $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$ et si on pose la suite $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ par $t_j = \exp(-j)$, on a alors $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{\omega(t_j)}{t_j} = \lim\limits_{j \to +\infty} \frac{(t_j)^{\alpha}}{t_j} = \lim\limits_{j \to +\infty} \frac{\exp(-j\alpha)}{\exp(-j)} = \lim\limits_{j \to +\infty} \exp(-j \cdot (\alpha - 1)) = 0$ si on prend le cas ou $\alpha > 1$. On remarque également que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} = C \cdot \omega(|x-y|)$, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. D'ou le point (2) est bien un cas particulier de (3)-(5).

Montrons alors dans la suite de l'exercice que si la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe $0 < C < +\infty$ avec $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot \omega(|x-y|)$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ alors f est constante et avec $\omega :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

<u>- Question 1 :</u>

Montrons que f est continue (et même uniformément continue). Soit $\epsilon > 0$, la condition que $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$ nous donne qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|t - 0| = |t| \leq \delta \implies |\omega(t) - 0| \leq \frac{\epsilon}{C}$ avec $0 < C < +\infty$. D'ou il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $|x - y| \leq \delta \implies \omega(|x-y|) \leq \frac{\epsilon}{C}$. D'ou on peut donc dire que $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot \omega(|x-y|) \leq C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. On peut donc conclure que :

$\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

D'ou on peut conclure que f est continue (et même uniformément continue) sur $\mathbf{R}$.

<u>- Question 2 :</u>

Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$, on a alors pour tout $\delta > 0$:

$$|g^\delta(x) - g^\delta(y)|$$

$$= |\int_{\mathbf{R}} f(x-z)\rho_\delta(z)dz - \int_{\mathbf{R}} f(y-z)\rho_\delta(z)dz|$$

$$= |\int_{\mathbf{R}} (f(x-z) - f(y-z))\rho_\delta(z)dz|$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}} |(f(x-z) - f(y-z))\rho_\delta(z)|dz$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}} C \cdot \omega(|x-z-y+z|)\rho_\delta(z)dz = \int_{\mathbf{R}} C \cdot \omega(|x-y|)\rho_\delta(z)dz$$

$$= C \cdot \omega(|x-y|) \cdot \int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(z)dz = C \cdot \omega(|x-y|)$$

.

On montre alors que pour tout $\delta > 0$, $g^\delta = f * g_\delta$ vérifie la proposition (5) de l'énoncé de l'exercice en utilisant l'inégalité triangulaire de l'intégrale et le fait que $\rho_\delta \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}+)$ soit un noyau régularisant, d'ou que $\int_{\mathbf{R}} \rho_\delta(z)dz = 1$ pour tout $z \in \mathbf{R}$.

- Question 3 :

La fonction g^δ avec $\delta > 0$, est de classe C^∞, donc dérivable sur $\mathbf{R}$, on a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g^\delta(x+h) - g^\delta(x)}{h} = (g^\delta)'(x)$ avec $h > 0$.

En particulier pour $h = t_j$ quand $j \to +\infty$ (d'ou quand $h \to 0$), on a alors $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{g^\delta(x+t_j) - g^\delta(x)}{t_j} = (g^\delta)'(x)$, mais on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{|g^\delta(x+t_j) - g^\delta(x)|}{t_j} \leq C \cdot \frac{\omega(t_j)}{t_j} \to 0$ quand $j \to +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{g^\delta(x+t_j) - g^\delta(x)}{t_j} = (g^\delta)'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction g^δ est constante sur $\mathbf{R}$.

- Question 4 :

Pour conclure, on applique le théorème de régularisation par convolution, comme f est une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$ et que ρ_δ est un noyau régularisant sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}+$. De plus la fonction g^δ est continue et bornée car elle est constante.

D'ou la fonction $g^\delta = f * \rho_\delta$ converge uniformément vers la fonction f quand $\delta \to 0$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x) - g^\delta(x)| = |f(x) - f * \rho_\delta(x)| \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Donc comme la fonction g^δ est constante pour $\delta > 0$, on en déduit que la fonction f est constante. Comme la fonction g^δ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, on a alors la fonction f qui est localement intégrable sur $\mathbf{R}$.

Comme la fonction f vérifie la proposition (2) de l'énoncé de l'exercice, on en déduit qu'il n'est pas intéressant de prendre le cas ou $\alpha > 1$.