TR 7 - Exercice 12 (TD 1)

Baptiste PLANTIER, Ezéchiel JIMENEZ, Jules PIRONY

5 octobre 2022

Exercice 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer la *formule du rayon spectral* :

$$\forall T \in \mathcal{L}(E), \quad \rho(T) := \max\big\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(T)\big\} = \lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \tag{2}$$

où $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, encore notée $\|\cdot\|$.
Notons qu'il n'est pas clair, à ce stade, que la limite considérée dans (2) existe.

1. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(T) \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Notons $\lambda_0 \in \sigma(T)$ telle que $|\lambda_0| = \rho(T)$.
Alors, par linéarité de T, on a pour tout vecteur propre $u_0 \in E\backslash\{0_E\}$ associé à λ_0 :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\|T^k(u_0)\|}{\|u_0\|} = \frac{\|\lambda_0^k u_0\|}{\|u_0\|} = |\lambda_0^k| = \rho(T)^k$$

Donc, par définition de $\|\cdot\|$, il vient :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(T)^k \leq \|T^k\|$$
Et d'où par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(T) \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

2. En déduire qu'il suffit de montrer que :

$$\rho(T) \geq \lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \tag{3}$$

En supposant que la $\lim\limits_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ existe, on a par passage à la limite dans l'inégalité de la question 1) :

$$\rho(T) \leq \lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

D'où le fait qu'il suffit de montrer (3) pour avoir (2).

3. Soit $P \in \mathcal{L}(E)$ inversible. Montrer que si (3) est vraie pour $P^{-1} \circ T \circ P$, alors (3) est vraie pour T.

Supposons (3) vraie pour $P^{-1} \circ T \circ P$. Remarquons d'abord que l'on a :

$$\rho(P^{-1} \circ T \circ P) = \rho(T)$$

En effet les matrices de $P^{-1} \circ T \circ P$ et de T sont semblables par définition, donc ont même polynôme caractéristique, donc ont mêmes valeurs propres et donc ont même rayon spectral.
D'autre part, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|T^k\| = \|P \circ P^{-1} \circ T^k \circ P \circ P^{-1}\| \leq \|P\| \cdot \|P^{-1} \circ T^k \circ P\| \cdot \|P^{-1}\|$$

car $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre.

D'où :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \Big(\|P\| \cdot \|P^{-1}\|\Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \|P^{-1} \circ T^k \circ P\|^{\frac{1}{k}}$$
Or :
$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\|P\| \cdot \|P^{-1}\|\Big)^{\frac{1}{k}} = 1$$
Donc, sous condition que la limite existe, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to+\infty} \|P^{-1} \circ T^k \circ P\|^{\frac{1}{k}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par} \\ \text{hypothèse}}}{\leq} \rho(P^{-1} \circ T^k \circ P) = \rho(T)$$

4. En déduire qu'il suffit de montrer (3) si $T = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $D \circ N = N \circ D$.

On va montrer que T est toujours semblable à un endomorphisme de la forme $D + N$ avec D et N satisfaisant les propriétés demandées. Tout d'abord, puisque E est un espace vectoriel complexe, T est trigonalisable et il existe une base $\mathcal{B}_{VP}$ de vecteurs propres dans laquelle la matrice de T est de la forme :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_{VP}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

où les $t_{i,j} \in \mathbb{C}$ et les λ_i sont les valeurs propres de T avec $r \leq n := \dim E$.
De plus, par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton (appliqué à χ_T), on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \underbrace{\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id})^{n_\lambda}}_{=:F_\lambda}$$

où n_λ est la multiplicité de λ.
Posons :

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \quad et \quad N := \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant encore D et N les endomorphismes associés aux matrices ci-dessus, on a D qui est diagonalisable et N nilpotent car de matrice respectivement diagonale et triangulaire supérieure stricte dans la base $\mathcal{B}_{VP}$. De plus, on a :

$$\forall \lambda \in \sigma(T), \quad D\restriction_{F_\lambda} = \lambda \operatorname{Id}$$

D'où $D \circ N = N \circ D$ sur E car :

$$\forall \lambda \in \sigma(T), \quad (D \circ N)\restriction_{F_\lambda} = \lambda \operatorname{Id} \circ (N\restriction_{F_\lambda}) = (N\restriction_{F_\lambda}) \circ \lambda \operatorname{Id} = (N \circ D)\restriction_{F_\lambda} \quad et \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} F_\lambda$$

Ainsi T est toujours semblable à un endomorphisme $T' = D+N$ avec D diagonalisable commutant avec N nilpotent, i.e il existe $P \in \mathcal{L}(E)$ inversible tel que :

$$P^{-1} \circ T \circ P = T' = D + N$$

Or par 3), on sait que si (3) est vraie pour $P^{-1} \circ T \circ P$, alors (3) est vraie pour T. Il suffit donc de montrer (3) dans le cas $T' = D + N$.

5. Montrer que, si (3) est vraie pour une norme, alors (3) est vrai pour toute norme.

Supposons que (3) est vraie pour une norme $\|\cdot\|$.
Soit N une autre norme sur $\mathcal{L}(E)$. Étant donné que E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ l'est aussi, et donc toutes les normes sur $\mathcal{L}(E)$ sont équivalentes.
Donc en particulier :

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha \|T^k\| \leq N(T^k) \leq \beta \|T^k\|$$

Soient de tels α et β. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha^{\frac{1}{k}} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leq N(T^k)^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Or :

$$\lim_{k \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$$

Donc par encadrement :

$$\lim_{k \to +\infty} N(T^k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

Et ainsi N satisfait aussi (3).

6. En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver une norme $\|\cdot\|$ qui vérifie (3) pour $T' = D+N$ comme ci-dessus.

Soit $T' = D + N$ comme ci-dessus.
Tout d'abord, on montre que, pour deux endomorphismes u, v de E qui commutent, on a l'inégalité :

$$\rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v)$$

En effet u et v sont tous deux trigonalisables (E est un $\mathbb{C}$-ev.). Puisqu'ils commutent, il existe alors une base de trigonalisation commune i.e. dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures avec leurs valeurs propres respectives sur la diagonale. Ainsi, par inégalité triangulaire sur les coefficients diagonaux, on obtient l'inégalité voulue.

Or on a :

$$D \circ N = N \circ D \qquad \text{et} \qquad T \circ (-N) = (-N) \circ T$$

Donc :

$$\rho(T) \leq \rho(D) + \rho(N) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } N \text{ est} \\ \text{nilpotente}}}{=} \rho(D) \qquad \text{et} \qquad \rho(D) = \rho(T-N) \leq \rho(T) + \rho(-N) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } -N \text{ est} \\ \text{nilpotente}}}{=} \rho(T)$$

Donc on a :

$$\rho(T) = \rho(D)$$

Donc si $D = 0$, alors $T = N$, donc T est nilpotent, donc $\rho(T) = 0$ et ainsi on a bien (3) qui est vérifiée (pour une norme quelconque). On peut donc supposer $D \neq 0$ pour la suite.

D'autre part, D est est diagonalisable donc (cf. exercice 11 - TD 1) il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans laquelle la norme subordonnée à la norme infinie $\|\cdot\|_\infty : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ donne :

$$|||D|||_\infty = \rho(D)$$

Plaçons-nous dans la base $\mathcal{B}$ et notons $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de N (N est toujours nilpotente dans cette base). On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\left|\left|T^k\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} = \left|\left|\left|(D+N)^k\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } D \text{ et } N \\ \text{commutent}}}{=} \left|\left|\left|\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i} \circ N^i\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } N^i=0 \\ \text{pour tout } i>p}}{=} \left|\left|\left|D^k + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} D^{k-i} \circ N^i\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq \left(|||D|||_\infty^k + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} |||D|||_\infty^{k-i} \cdot |||N|||_\infty^i\right)^{\frac{1}{k}} \underset{\substack{\uparrow \\ |||D|||_\infty \neq 0}}{=} |||D|||_\infty \left[1 + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} \left(\frac{|||N|||_\infty}{|||D|||_\infty}\right)^i\right]^{\frac{1}{k}}$$

Or :

$$|||D|||_\infty = \rho(D) = \rho(T)$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho(T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après 1)}}}{\leq} \left|\left|\left|T^k\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \rho(T) \left[1 + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} \left(\frac{|||N|||_\infty}{|||D|||_\infty}\right)^i\right]^{\frac{1}{k}}$$

Or (polynôme en k) :

$$\lim_{k\to+\infty} \left[1 + \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i} \left(\frac{|||N|||_\infty}{|||D|||_\infty}\right)^i\right]^{\frac{1}{k}} = 1$$

Donc par encadrement, la suite $\left(\left|\left|\left|T^k\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}}\right)_{k\geq 1}$ converge et on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\left|\left|T^k\right|\right|\right|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \rho(T)$$

7. Conclure

Par la question 6), on sait qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ *pour laquelle*

$$(3) \quad \rho(T) \geq \lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$

est vraie pour tous les endomorphismes de la forme $T' = D + N$ *avec* D *diagonalisable,* N *nilpotente tels que* D *et* N *commutent.*

Donc par la question 5) c'est vrai pour toute norme sur E.

Or par la question 4) et la 3), il suffit de montrer que (3) *est vraie pour toute norme dans le cas* $T' = D + N$ *pour que* (3) *soit vraie pour* T *pour toute norme.*

Donc (3) *est vraie pour* T *(pour toute norme).*

Donc par les questions 2) et 1) on a finalement (pour toute norme) :

$$(2) \quad \rho(T) = \lim_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$$