limsup

Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités 2013-2014

Université Lyon 1

8 septembre 2013

sup dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition

Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, alors $\sup A =$*le plus petit $M \in \overline{\mathbb{R}}$ t. q. M majorant de A*

Axiome de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}$ admet un sup

- Si $\infty \in A$, alors $\sup A = \infty$
- Si $A \subset \mathbb{R}$, alors $\sup A =$ le sup « usuel » si A majorée, ∞ sinon
- Et si $-\infty \in A$?

Une des raisons pour travailler avec le sup « étendu » : $\limsup$

lim sup

Définition

Si $(x_n) \subset \mathbb{R}$, *alors*

$$\limsup x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

Quizz

Définir $\liminf_{x \nearrow a} f(x)$

Proposition

Toute suite a (exactement une) lim sup

Propriétés de base

* $x_n \to l \iff \limsup x_n = \liminf x_n = l$
* $x_n \to l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \liminf x_n \geq l - \varepsilon,\ \limsup x_n \leq l + \varepsilon$

Quizz

$x_n \to \infty \iff ?$

Si les opérations ont un sens, alors

* $x_n \to x \geq 0 \implies \limsup(x_n y_n) = x \limsup y_n$
* $x_n \to x \implies \limsup(x_n + y_n) = x + \limsup y_n$
* $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$
* $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$