Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints

Notations

• Rappel : dans un espace vectoriel *complexe* H, un produit scalaire est une application $(\ ,\ )$ telle que $(x,y)\in\mathbb{C}$, $\forall\ x,y\in H$ et :
(i) $(x+\lambda y,z)=(x,z)+\lambda(y,z)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $x,y,z\in H$;
(ii) $(y,x)=\overline{(x,y)}$, $x,y\in H$;
(iii) $(x,x)>0$, $x\in H\setminus\{0\}$.
• Dans la suite, H un espace de Hilbert *complexe* qui n'est pas réduit à 0, muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$. On note $|\cdot|$ la norme associée au produit scalaire.
• Si $H=\mathbb{C}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$), le produit scalaire sur H est le produit *canonique* :

$$((z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n))=\sum_{j=1}^n z_j\overline{w}_j.$$

La base canonique de $\mathbb{C}^n$ est notée $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Si T est un endomorphisme linéaire de H, on note $T_{jk}=(Te_k,e_j)$, $j,k=1,\ldots,n$, les éléments de la matrice de T dans la base canonique.
• On note $\langle x\rangle$ l'espace engendré par le vecteur x. Plus généralement, $\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ est l'espace engendré par les vecteurs $x_1,\ldots,x_k$.
• Si F est un sous espace de H, $F^\perp$ désigne son orthogonal.
• $\mathcal{LC}(H)$ est l'espace des applications linéaires et continues de H vers H, muni de la norme usuelle notée $\|\ \|$. I est l'identité de H.
• $T\in\mathcal{LC}(H)$ est *auto-adjoint* si et seulement si $(Tx,y)=(x,Ty)$, $x,y\in H$.
• Si K est un compact de $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathscr{B}_K$ la tribu borélienne de K. Une *mesure complexe* sur $\mathcal{B}(K)$ est une application $\mu:\mathcal{B}(K)\to\mathbb{C}$ telle qu'il existe quatre mesures (positives) boréliennes et finies $\mu_1,\ldots,\mu_4$ sur $\mathcal{B}(K)$ avec $\mu=\mu_1-\mu_2+\imath\mu_3-\imath\mu_4$. Si f est borélienne et bornée sur K, on définit $\int_K fd\mu=\int_K fd\mu_1-\int_K fd\mu_2+\imath\int_K fd\mu_3-\imath\int_K fd\mu_4$.

Résultats admis

• On pourra utiliser le *théorème de représentation de Riesz* sous la forme suivante :
Soit $K\subset\mathbb{R}$ un compact. Si $F:C(K;\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ est une application linéaire telle que $|F(f)|\le C_0\|f\|_{L^\infty(K)}$, $\forall\ f\in C(K;\mathbb{C})$, alors il existe une et une seule mesure complexe μ telle que $F(f)=\displaystyle\int_K fd\mu$, $f\in C(K;\mathbb{C})$.
De plus, si $f:K\to\mathbb{C}$ est borélienne et bornée, alors on a $\left|\displaystyle\int_K fd\mu\right|\le C_0\|f\|_{L^\infty(K)}$.
• On pourra aussi utiliser la forme suivante du théorème de la classe monotone :
Soit $K\subset\mathbb{R}$ un compact. Soit $\mathscr{F}$ un sous espace vectoriel de $\{f:K\to\mathbb{C}\}$ (avec les opérations usuelles) tel que :
(H1) $C(K;\mathbb{C})\subset\mathscr{F}$;
(H2) si $(f_n)\subset\mathscr{F}$ est une suite qui converge simplement et telle qu'il existe C tel que $|f_n|\le C$, $\forall\ n$, alors $\lim f_n\in\mathscr{F}$.
Alors $\mathscr{F}$ contient toutes les fonctions boréliennes et bornées sur K.

I. Dans cette partie, H est de dimension finie n, et T est un endomorphisme linéaire de H.
1. Si $H = \mathbb{C}^n$, montrer que T est auto-adjoint si et seulement si $T_{kj} = \overline{T_{jk}}$, $j, k = 1, \ldots, n$.

À partir de maintenant, on ne suppose plus $H = \mathbb{C}^n$.
2. Montrer que T est auto-adjoint si et seulement si la matrice $A = (a_{jk})$ de T dans une base orthonormée de H vérifie $a_{kj} = \overline{a_{jk}}$, $j, k = 1, \ldots, n$.

Dans la suite, on suppose T auto-adjoint.
3. Montrer que les valeurs propres de T sont réelles.
4. Soit λ une valeur propre de T et soit x un vecteur propre asocié à λ. Montrer que $T(\langle x\rangle^\perp) \subset \langle x\rangle^\perp$.
5. Montrer qu'il existe une base orthonormée de H telle que la matrice de T dans cette base soit diagonale et réelle. Établir la réciproque de cette propriété.

II. Dans cette partie, H est quelconque (=pas forcément de dimension finie) et $T \in \mathcal{L}C(H)$.
On définit les parties suivantes de $\mathbb{C}$:
$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ T - \lambda I$ n'est pas bijectif$\}$ (le *spectre* de T) ;
$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ (la *résolvante* de T)
et le nombre $r(T) = \sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(T)\}$ (le *rayon spectral* de T).
1. Si $U \in \mathcal{L}C(H)$ et $\|U\| < 1$, montrer que $I - U$ est inversible et que $\|(I-U)^{-1}\| \leq (1 - \|U\|)^{-1}$.
2. Si $|\lambda| > \|T\|$, montrer que $\lambda \in \rho(T)$ et que $\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq (|\lambda| - \|T\|)^{-1}$.
3. Montrer que $\sigma(T)$ est borné.
4. Montrer que $\{U \in \mathcal{L}C(H)\ ;\ U$ bijectif$\}$ est un ouvert de $\mathcal{L}C(H)$.
5. En déduire que $\rho(T)$ est ouvert et que $\sigma(T)$ est compact.
6. Établir l'*identité de la résolvante* :
$(T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1}$, $\lambda, \mu \in \rho(T)$.
7. En déduire que, pour tout $x, y \in H$, l'application $f_{xy} : \rho(T) \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto ((T - \lambda I)^{-1}x, y)$ est holomorphe.
8. Calculer $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} f_{xy}(\lambda)$. En déduire que $\sigma(T)$ est non vide. Que peut-on dire si H est supposé réel ?

III. Dans cette partie, H est quelconque et $T \in \mathcal{L}C(H)$.
1. Si $U, V \in \mathcal{L}C(H)$ commutent et si UV est bijectif, montrer que U et V sont bijectifs.
2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, montrer que $\lambda^k \in \sigma(T^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $r(T) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$.
4. On suppose $|\lambda| > \limsup\limits_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$. Montrer que la série $-\sum\limits_{n\geq 0} \lambda^{-n-1}T^n$ est convergente. En déduire que $\lambda \in \rho(T)$.
5. On se propose de montrer l'égalité $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Preuve par l'absurde : sinon, au vu de **3.**, on a $r(T) < R := \limsup\limits_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}$. Soit a tel que $r(T) < a < R$ et soit $b = 1/a$.
On considère la fonction $g_{xy} : \mathbb{D}(0, 1/r(T)) \to \mathbb{C}$, $g_{xy}(z) = \begin{cases} f_{xy}(1/z), & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$ (avec $x, y \in H$).
(i) Montrer que g_{xy} est holomorphe.
(ii) Montrer que, sur $\mathbb{D}(0, 1/R)$, on a $g_{xy}(z) = -\sum (T^n x, y) z^{n+1}$.

(iii) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait $|g_{xy}(z)| \leq C|x||y|$, $\forall\ \overline{\mathbb{D}}(0,b)$.
(iv) En déduire que $\|T^n\| \leq C/b^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
(v) Conclure.
6. Soient $H = \mathbb{C}^2$, $T(z_1, z_2) = (z_2, 0)$. Calculer $\|T\|$ et $r(T)$.

IV. Dans cette partie, H est quelconque et $T \in \mathcal{LC}(H)$.
1. Montrer qu'il existe un $S \in \mathcal{LC}(H)$ et un seul tel que $(Tx, y) = (x, Sy)$, $\forall\ x, y \in H$.
S est l'*adjoint* de T et sera noté par la suite T^*.
2. Montrer que l'application $T \mapsto T^*$ est anti-linéaire et continue dans $\mathcal{LC}(H)$.
(Une application $f : E \to E$, avec E espace vectoriel complexe, est anti-linéaire si $f(x + \lambda y) = f(x) + \overline{\lambda} f(y)$, $x, y \in E$, $\lambda \in E$.)
3. Montrer que :
(i) T est auto-adjoint si et seulement si $T^* = T$;
(ii) $\|T^*\| = \|T\|$;
(iii) $(T^*)^* = T$;
(iv) $(ST)^* = T^*S^*$, $\forall\ S \in \mathcal{LC}(H)$;
(v) $r(T^*) = r(T)$.
4. Montrer que T est auto-adjoint si et seulement si $T^* = T$.
5. Si $H = \mathbb{C}^n$, montrer que $T^*_{jk} = \overline{T_{kj}}$.
6. Montrer que $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$.

Par définition, T est *normal* si $T^*T = TT^*$. En particulier, si T est auto-adjoint, alors T est normal.
On définit
$\mathscr{N}(H) = \{T \in \mathcal{LC}(H)\ ;\ T \text{ est normal}\}$
$\mathscr{A}(H) = \{T \in \mathcal{LC}(H)\ ;\ T \text{ est auto-adjoint}\}$.
7. Montrer que $\mathscr{N}(H)$ et $\mathscr{A}(H)$ sont des parties fermées de $\mathcal{LC}(H)$.
8. Montrer que, si T est auto-adjoint, alors $\|T^2\| = \|T\|^2$. En déduire que $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, puis que $\|T^m\| = \|T\|^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.
9. Montrer que, si T est normal, alors $r(T)^2 = r(T^*T)$. En déduire que $r(T) = \|T\|$.

V. Dans cette partie, H est quelconque et $T \in \mathscr{A}(H)$.
1. Montrer que $(T(H))^\perp = \text{Ker}\ T$. En déduire que, si T est injectif, alors son image est dense dans H.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $|(T - \lambda I)x|^2 \geq (Im\lambda)^2 |x|^2$, $x \in H$. En déduire que $(T - \lambda I)(H)$ est fermé, puis que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, on pose $P(T) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j T^j$.
3. Calculer $(P(T))^*$. Montrer que $P(T) \in \mathscr{N}(H)$.
4. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Montrer que $P(T) - P(\lambda)I$ n'est pas inversible.
5. Réciproquement, on suppose que $P(T) - \mu I$ n'est pas inversible. Montrer qu'il existe un $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $\mu = P(\lambda)$. En déduire que $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.
6. Montrer que $\|P(T)\| = \sup\{|P(\lambda)|\ ;\ \lambda \in \sigma(T)\}$.
7. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire et continue $F : C(\sigma(T)) \to \mathscr{N}(H)$

telle que $F(P) = P(T)$, $P \in \mathbb{C}[X]$. (F est le *calcul fonctionnel continu* asocié à T.)
Dans la suite, nous notons $F(f) = f(T)$.
8. Montrer que, pour $f, g \in C(\sigma(T))$, on a :
(i) $\|f(T)\| = \sup\{|f(\lambda)|\ ;\ \lambda \in \sigma(T)\}$;
(ii) $(f(T))^* = \overline{f}(T)$;
(iii) $f(T)g(T) = g(T)f(T) = (fg)(T)$;
(iv) Si $f \neq 0$ sur $\sigma(T)$, alors $f(T)$ est bijectif.
9. Montrer que $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (c'est le *théorème spectral*).
10. Si $H = \mathbb{C}^n$ et si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base orthonormée de H telle qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $T(f_j) = \lambda_j f_j$, $j = 1, \ldots, n$, montrer que $f(T)(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(x, f_j)f_j$.

VI. Dans cette partie, H est quelconque.
1. Soit $T \in \mathscr{A}(H)$. Montrer que $(Tx, x) \in \mathbb{R}$, $x \in H$.

Par définition, $T \in \mathscr{A}(H)$ est *positif* si $(Tx, x) \geq 0$, $x \in H$. On introduit sur $\mathscr{A}(H)$ la relation d'ordre partielle $S \leq T \iff T - S \geq 0$.
Dans la suite, on fixe $T \in \mathscr{A}(H)$.
2. Si $T \geq 0$, montrer que $\sigma(T) \subset [0, \infty[$. (On pourra raisonner comme dans **V.2.**)
3. Réciproquement, on suppose $\sigma(T) \subset [0, \infty[$. Soit $f : \sigma(T) \to [0, \infty[$, $f(t) = \sqrt{t}$. Montrer que $f(T) \in \mathscr{A}(H)$. (On notera, dans la suite, $f(T) = \sqrt{T}$.) En déduire que $T \geq 0$.
4. Montrer que :
(i) si $f, g \in C(\sigma(T); \mathbb{R})$ et $f \leq g$, alors $f(T) \leq g(T)$;
(ii) si $f \in C(\sigma(T); \mathbb{R})$, alors $f(T) \geq 0$ si et seulement si $f \geq 0$.

Dans la suite, on suppose $T \geq 0$.
5. Montrer que $\sqrt{T} \geq 0$.
6. Soit $A \in \mathscr{A}(H)$. Si $f \in C(\sigma(A^2))$, montrer que $f(A^2) = g(A)$, où $g(t) = f(t^2)$, $t \in \sigma(A)$.
7. En déduire que $\sqrt{T}$ est l'unique solution $A \in \mathscr{A}(H)$, $A \geq 0$, de l'équation $A^2 = T$.

VII. Dans cette partie, H est quelconque et $T \in \mathscr{A}(H)$.
1. Soient $x, y \in H$. Montrer qu'il existe une et une seule mesure complexe μ_{xy} telle que $\displaystyle\int_{\sigma(T)} f d\mu_{xy} = (f(T)x, y)$, $\forall\ f \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$.
2. Montrer que :
(i) l'application $x \mapsto \mu_{xy}$ (à y fixé) est linéaire ;
(ii) $\mu_{yx} = \overline{\mu}_{xy}$, $x, y \in H$.

Soit $\mathscr{B}_b(\sigma(T)) = \{f : \sigma(T) \to \mathbb{C}\ ;\ f$ borélienne et bornée$\}$, muni de la norme sup : $\|f\|_{L^\infty(\sigma(T))} = \sup\{|f(t)|\ ;\ t \in \sigma(T)\}$. (**Attention** : ce n'est pas le sup essentiel.)
3. Montrer qu'il existe, pour $f \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$, un et un seul $S \in \mathcal{LC}(H)$ tel que $(Sx, y) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{xy}$, $x, y \in H$.
Dans la suite, S sera noté $f(T)$. (L'application $f \mapsto f(T)$ est le *calcul fonctionnel borélien* associé à T.)
4. Montrer que :
(i) $(f(T))^* = \overline{f}(T)$, $f \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$;
(ii) si (f_n) est une suite bornée de $\mathscr{B}_b(\sigma(T))$ telle que $f_n \to f$ simplement, alors $(f_n(T)x, y) \to$

$(f(T)x, y)$, $x, y \in H$;
(iii) $\|f(T)\| \leq \|f\|_{L^\infty(\sigma(T))}$, $f \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$;
(iv) $f \mapsto f(T)$ est linéaire et continue de $\mathscr{B}_b(\sigma(T))$ vers $\mathcal{LC}(H)$.
5. Montrer que, pour tout $f \in C(K; \mathbb{C})$ et $g \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$, on a $f(T)g(T) = g(T)f(T) = (fg)(T)$.
6. En déduire que $f(T)g(T) = g(T)f(T) = (fg)(T)$, $f, g \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$.
7. Montrer que $f(T) \in \mathscr{N}(H)$, $f \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$.

Soit $B \subset \sigma(T)$ un borélien. On pose $P_B = \mathbf{1}_B(T)$. ($\mathbf{1}_B$ étant la fonction caractéristique de B.)
8. Montrer que P_B est un projecteur orthogonal (c'est le *projecteur spectral* de B).
9. Soit $f \in \mathscr{B}_b(\sigma(T))$. Soit $B = \{\lambda \in \sigma(T) \ ; \ f(\lambda) \neq 0\}$. Montrer que l'image de $f(T)$ est contenue dans celle de P_B.
10. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Montrer que $P_{\{\lambda\}}$ est le projecteur orthogonal sur l'espace propre correspondant à λ (c'est-à-dire sur Ker $(T - \lambda I)$).

Pour aller plus loin. Le problème du *calcul fonctionnel* est : donné $T \in \mathcal{LC}(H)$ (et même un T plus général), donner un sens raisonnable à $f(T)$ pour des fonctions f aussi générales que possibles. L'aspect abordé ici est celui où T est auto-adjoint et la réponse trouvée est : on peut définir $f(T)$ si f est borélienne et bornée sur $\sigma(T)$.
En général, la réponse dépend des propriétés de T.
Si la seule propriété de T est la continuité, on peut définir le *calcul holomorphe* :
on peut donner un sens à $f(T)$ si f est holomorphe au voisinage de $\sigma(T)$. Dans cette situation, on peut remplacer « espace de Hilbert » par « espace de Banach ». Ce calcul (le *calcul de Riesz*) a des propriétés similaires à celui étudié dans ce texte. Par exemple : si $f = \sum_0^n a_j X^j$ est un polynôme, alors $f(T) = \sum a_j T^j$; on a le théorème spectral ; on a la « continuité » de $f \mapsto f(T)$.
En règle générale, plus on sait des choses sur T, plus on peut définir $f(T)$ pour des fonctions « plus générales ». Ici, nous avons évoqué le cas où T est auto-adjoint. Les résultats obtenus dans ce cas s'étendent au cas où T est *normal.*
Deux références pour en apprendre plus : Michael REED et Barry SIMON, Methods of modern mathematical physics, Academic Press, 1980. C'est un livre magnifiquement écrit. Le chapitre VII du premier tome traite le calcul des opérateurs auto-adjoints. John B. CONWAY, A Course in Functional Analysis, Springer, second edition, 1990. Livre plus difficile à lire. On y trouve le calcul de Riesz. Par ailleurs, les chapitres VII-IX traitent en toute généralité le calcul des opérateurs normaux.