Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Ergodicité

Exercice 1. Soit $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique usuelle et $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, muni d'une métrique produit. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\Phi(s,t) := (e^{2\pi\imath s}, e^{2\pi\imath t})$. À chaque fonction $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$, on associe $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $\tilde{f} := f \circ \Phi$.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) f est continue ;

b) $\tilde{f}$ est continue.

Par ailleurs, montrer, pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) il existe $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ continue telle que $g = \tilde{f}$;

b) g est continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique (au sens où $g(x+z) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, z \in \mathbb{Z}^2$).

Exercice 2. Par définition, un polynôme trigonométrique dans $\mathbb{R}^2$ est une somme finie de la forme $(\theta, \varphi) \mapsto \sum a_{m,n} e^{2\pi\imath m\theta} e^{2\pi\imath n\varphi}$. Montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues et $\mathbb{Z}^2$-périodiques sur $\mathbb{R}^2$, muni de la norme sup.

Exercice 3. (*ergodicité du billard carré*)

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer le *théorème ergodique* :
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \alpha t + b)\, dt = \int_{[0,1]^2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

b) Montrer que la conclusion ci-dessus reste encore vraie si $f = \mathbb{1}_A$, avec A (la répétition $\mathbb{Z}^2$-périodique d')un rectangle contenu dans $[0,1[^2$.

c) On considère un billard carré $[0,1] \times [0,1]$ et une bille lancée sur ce billard avec une pente α irrationnelle. On suppose que la bille obéit aux lois de l'optique géométrique lorsqu'elle rebondit sur les bandes et qu'elle avance à vitesse constante. Soit $F \subset [0,1[^2$ un rectangle. On note $A(T)$ le temps compris entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = T$ que la bille passe dans F. Montrer le *théorème ergodique du billard carré* : $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{A(T)}{T} = \lambda(F)$, avec λ la mesure de Lebesgue.

Exercice 4. (*théorème ergodique de von Neumann*) Soit H un espace de Hilbert réel. Par définition, $T \in \mathscr{L}(H)$ est une contraction si et seulement si $\|T\| \le 1$.

a) Montrer que, pour tout $x \in H$, $Tx = x \iff T^*x = x$.

b) (*théorème ergodique de von Neumann*) Soit T une contraction et soit P le projecteur orthogonal sur $N(T - I)$. Pour tout $x \in H$, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x + Tx + \ldots + T^{n-1}x) = Px$.

Exercice 5. (*critère de Weyl*) Soit $(x_n) \subset [0,1[$. On dit que (x_n) est équi-répartie si, pour tous $0 \le a < b < 1$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{m \le n\,;\, x_m \in [a,b[\}}{n} = b - a.$$

Plus généralement, la suite $(x_n) \subset \mathbb{R}$ est équi-répartie si la suite (y_n) des parties fractionnaires de (x_n) l'est.

a) (*nombres de Pisot*) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire. On suppose que P a une racine θ réelle et de module > 1, alors que ses autres racines sont de module < 1. Montrer que la suite (θ^n) n'est pas équi-répartie. Cas particulier : $\theta = \sqrt{2} + 1$.

b) Montrer qu'une suite équi-répartie dans $[0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$.

c) Montrer que $(x_n) \subset \mathbb{R}$ est équi-répartie si et seulement si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $[0, 1[$ au sens de Riemann et 1-périodique, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(t)\, dt$.

d) Dans ce qui précède, on peut remplacer f intégrable au sens de Riemann par f continue.

e) (*critère de Weyl*) On a (x_n) équi-répartie $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi\imath m x_k} = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. (*équi-répartition*)

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $(n\alpha)$ est équi-répartie.

b) Soit $(a_n) \subset \mathbb{C}$ une suite bornée. Si $\displaystyle\sum \frac{1}{n^3} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^2 < \infty$, alors $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$.

c) Soit (f_n) une suite uniformément bornée de fonctions boréliennes sur $[a, b]$. Si

$$\sum \frac{1}{n^3} \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right|^2 dx < \infty,$$

montrer que $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k \to 0$ p. p.

d) (*théorème de Koksma*) Montrer que, pour presque tout $x > 1$, la suite (x^n) est équi-répartie.

Exercice 7. (*théorèmes du retour de Poincaré*)

a) (*premier théorème du retour*) Soit $(X, \mathscr{B}, \mu)$ un espace probabiliste et soit $T : X \to X$ une application mesurable telle que l'image de μ par T soit μ. Soit $B \in \mathscr{B}$. Montrer que, pour presque tout $x \in B$, il existe un $k \geq 1$ tel que $T^k(x) \in B$. [Indications : montrer que $\displaystyle\int f \circ T\, d\mu = \int f\, d\mu$ si f convenable. Appliquer ce résultat à $\exp\left(-\sum \chi_A \circ T^n\right)$.]

b) (*deuxième théorème du retour*) On suppose, de plus : X métrique complet, $\mathscr{B}$ la tribu borélienne sur X, la mesure de chaque boule est strictement positive, et T homéomorphisme. Pour $\varepsilon > 0$, un point $x \in X$ est dit ε-récurrent s'il existe $k \geq 1$ tel que $d(x, T^k(x)) < \varepsilon$. Un point est dit récurrent s'il existe $k_n \nearrow \infty$ tel que $T^{k_n}(x) \to x$.
   – Montrer que l'ensemble des points ε-récurrents est un ouvert dense.
   – En déduire que l'ensemble des points récurrents est dense.

Mots clés associés à cette feuille : sommes trigonométriques, théorème de Fejér. Tribu borélienne. Intégrale de Riemann. Espaces de Hilbert, adjoint d'un opérateur, orthogonal d'un sous espace. Espaces métriques complets, lemme de Baire. Lemme d'Urysohn.

À lire :

Chambert-Loir, Antoine ; Fermigier, Stéfane ; Maillot, Vincent, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Analyse 1.* Masson, 1997. ISBN : 2-225-85516-1