Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Séries de Fourier

Toutes les intégrales sont calculées par rapport à la mesure de Lebesgue.

Notations

• $\mathbb{D}$ (respectivement $\overline{\mathbb{D}}$) désigne le disque unité (respectivement le disque unité fermé) de $\mathbb{C}$;

• $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est *harmonique* si elle est de classe C^2 et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$;

• $\mathscr{M} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; ; f \text{ Lebesgue mesurable et } 2\pi - \text{périodique}\}$;

• $\mathscr{C} = \mathscr{M} \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

• $\mathscr{C}^\infty = \mathscr{M} \cap C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

• pour $1 \le p \le \infty$, $L^p = \{f \in \mathscr{M} \; ; \; f \in L^p(]0, 2\pi[)\}$. Ici, $]0, 2\pi[$ est muni de la mesure de Lebesgue. On munit L^p de la norme $\|f\|_{L^p} = (2\pi)^{-1/p} \|f_{|]0,2\pi[}\|_{L^p(]0,2\pi[)}$;

• pour $f \in L^1$, on pose :

a) pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-\imath n t} dt$;

b) pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S_n(f) = S_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{\imath k x}$;

c) pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = F_n(f) = F_n(f)(x) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)}{n+1}$.

• Le produit scalaire dans L^2 est $(f, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g}(t) dt$. La même formule définit (f, g) si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, avec p et q conjugués.

Résultats admis

• pour $1 \le p < \infty$, $\mathscr{C}^\infty$ (et donc $\mathscr{C}$) est dense dans L^p.

• *Théorème de Banach-Steinhaus.* Soient E, F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires et continus de E vers F. Si, pour tout $e \in E$, la suite $(T_n(e))$ est bornée dans F, alors la suite $(\|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)})$ est bornée.

• *Principe du maximum.* Soit $g : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ et continue dans $\overline{\mathbb{D}}$. Soit $h = g_{|\partial \mathbb{D}}$. Alors $g \ge \min h$.

• *Théorème de Riesz.* Si $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p, alors $\|f\|_{L^p} = \sup\{(f, g) \; ; \; g \in L^q, \|g\|_{L^q} \le 1\}$.

I.

Exercice 1. Si $f \in L^1$, montrer que $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que les fonctions de $\mathscr{C}$ sont uniformément continues.

Exercice 3. Montrer que $F_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt$, où $\Phi_n \in \mathscr{C}$ et $\Phi_n(t) = \dfrac{\sin^2 \dfrac{(n+1)t}{2}}{\pi(n+1)\sin^2 \dfrac{t}{2}}$ si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Montrer que Φ_n a les propriétés suivantes :

a) $\Phi_n \in L^1$;

b) $\Phi_n \geq 0$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Phi_n(t)dt = 1$;

d) $\Phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Montrer que, pour toute suite (Φ_n) satisfaisant a)-d) ci-dessus et pour toute fonction $f \in \mathscr{C}$, on a $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, où $f_n(x) := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt$.
En déduire le *théorème de Fejér* : si $f \in \mathscr{C}$, alors $F_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

II. Soient $f, g \in \mathscr{M}$. On définit, si cela a un sens, $f * g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$.

Exercice 1. Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$ (avec $1 \leq p \leq \infty$), montrer que $f * g \in L^p$ et que $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.

Exercice 2. Soit $\mathscr{F}_n$ l'application $f \mapsto F_n(f)$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, montrer que $\mathscr{F}_n : L^p \to L^p$ est bien définie, linéaire, continue et de norme égale à 1.

Exercice 3. En déduire que, si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, alors $F_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^p.
Montrer que ce résultat est faux dans L^∞.

Exercice 4. Montrer que, pour $g \in L^1$, la norme de l'application $L^1 \ni f \mapsto f * g \in L^1$ est $\|g\|_{L^1}$.

III.

Exercice 1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\left|\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right| \leq C$ pour $0 < |x| \leq \pi$.

Exercice 2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{|\sin nt|}{t}\,dt - \frac{2}{\pi}\ln n\right| \leq C, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 3. Trouver Ψ_n telle que $S_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\Psi_n(x-t)dt$, $f \in L^1$.

Exercice 4. Montrer que :

a) $\Psi_n \in L^1$ est une fonction paire et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Psi_n(t)dt = 1$;

b) il existe $C > 0$ tel que $\displaystyle\left|\Psi_n(x) - \frac{\sin nx}{\pi x}\right| \leq C$ pour $0 < |x| \leq \pi$ et $n \in \mathbb{N}$;

c) il existe $C > 0$ tel que $\displaystyle\left|\|\Psi_n\|_{L^1} - \frac{2}{\pi^3}\ln n\right| \leq C$.

Exercice 5. Montrer qu'il existe $f \in L^1$ telle que $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \|S_n(f)\|_{L^1} = \infty$. En déduire qu'en général, si $f \in L^1$, $S_n(f) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f$ dans L^1.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

IV.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{M}$ telle que $|f| \leq 1$. Montrer qu'il existe une suite $(f_n) \subset \mathscr{C}$ telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \to f$ p. p. par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Si $f \in L^\infty$ et $g \in L^1$ et , montrer que $f * g \in \mathscr{C}$.
Indication : commencer par le cas $g(x) = e^{\imath nx}$.

Exercice 3. Soit $g \in L^1$. Soit T l'application $f \mapsto f * g$. Montrer que $\|T\|_{\mathscr{L}(L^\infty, L^\infty)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{C},\mathscr{C})} = \|g\|_{L^1}$.

Exercice 4. Montrer le *théorème de du Bois-Reymond* : il existe $f \in \mathscr{C}$ telle que $S_n(f) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f$ uniformément.

Dans la suite de cette partie, on se propose de construire explicitement une fonction $f \in \mathscr{C}$ telle que $S_n(f) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f$ uniformément.

Exercice 5. On pose $K_n(t) = \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt$. Montrer que, pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a
$$K_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. Soit $\displaystyle f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin jt}{j}$.

a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\left|f_n(t) - \int_0^t \frac{\sin(n + 1/2)s}{s} ds\right| \leq C, \quad n \in \mathbb{N},\ t \in]0, 2\pi[.$$

b) Montrer que la suite $(\|f_n\|_{L^\infty})$ est bornée.

Exercice 7. Donner un exemple de deux suites, $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers, $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs, telles que :
$$\text{(H)} \quad n_{k+1} > 3n_k, \quad \sum \alpha_k < \infty, \quad \alpha_k \ln n_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Exercice 8. On pose, avec les f_n de l'exercice **6** et (n_k), (α_k) satisfaisant (H), $g_k(t) = e^{2\imath n_k t} f_{n_k}(t)$.
Montrer que $f \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k$ appartient à $\mathscr{C}$.

Exercice 9. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \dfrac{S_{2n_k}(f)(0)}{\alpha_k \ln n_k} = \dfrac{\imath}{2}$. Conclure.

V.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|c_n(f)| \leq \dfrac{C}{|n|^k}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, où C dépend de k et f.

b) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} -\imath(\text{sgn}\ n)\, c_n(f) e^{\imath nx}$ définit une fonction, notée $\tilde{f}$, appartenant à $\mathscr{C}^\infty$.

Soit $T : \mathscr{C}^\infty \to \mathscr{C}^\infty$, $Tf = \dfrac{f + \imath\tilde{f} + c_0(f)}{2}$ (donc $Tf(x) = \sum_{n\geq 0} c_n(f) e^{\imath nx}$). Nous admettons, dans cette partie, le résultat suivant, qui sera montré dans la partie **VII** :
Théorème de Riesz. Pour $1 < p < \infty$, il existe C_p telle que (*) $\|Tf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$, $f \in \mathscr{C}^\infty$.

Exercice 2. Montrer que

$$S_n(f)(x) = e^{-\imath nx} T(e^{\imath nx} f)(x) - e^{\imath(n+1)x} T(e^{-\imath(n+1)x} f)(x), \quad f \in \mathscr{C}^\infty.$$

Exercice 3. Montrer qu'il existe, pour $1 < p < \infty$, C'_p telle que $\|S_n(f)\| \leq C'_p \|f\|_{L^p}$, $f \in \mathscr{C}^\infty$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire le
Théorème de Riesz. Pour $1 < p < \infty$ et $f \in L^p$, on a $S_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^p.

VI. Dans les questions **1.-3.**, on fixe une fonction *réelle* $f \in \mathscr{C}^\infty$. On note $a_n = c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ (donc $\tilde{f}(x) = -\imath \sum (\text{sgn}\ n)\, a_n e^{\imath nx}$). Pour $z \in \overline{\mathbb{D}}$ on pose $f_h(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n \overline{z}^{-n}$.

Exercice 1. Montrer que f_h est réelle, harmonique dans $\mathbb{D}$ et continue dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 2. Montrer que, si $\breve{f} := \dfrac{f_h + \imath(\tilde{f})_h + a_0}{2}$, alors $\breve{f}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$, continue dans $\overline{\mathbb{D}}$, de partie réelle $\dfrac{f_h + a_0}{2}$ et telle que sa partie imaginaire s'annule en 0.

Exercice 3. On suppose $f \not\equiv 0$. Soit $1 < p < \infty$. Montrer qu'il existe $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^\infty$ telles que : $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $f = f_1 - f_2$ et $\|f_1\|_{L^p} + \|f_2\|_{L^p} \leq 5\|f\|_{L^p}$.

Exercice 4. Montrer que, pour montrer l'inégalité (*) du théorème de Riesz, il suffit de vérifier cette inégalité pour $f > 0$.

Exercice 5. Établir (*) si $p = 2$.

Exercice 6. Montrer que, pour le produit scalaire de L^2, on a $(Tf, g) = (f, Tg)$, $f, g \in \mathscr{C}^\infty$.

Exercice 7. On suppose (*) vraie pour un $p \in]1, \infty[$. Soit q l'exposant conjugué de p ($q = p/(p-1)$). Montrer que $\|Tf\|_{L^q} \leq C_p \|f\|_{L^q}$, $f \in \mathscr{C}^\infty$.

Exercice 8. Montrer que, pour établir le théorème de Riesz, il suffit de vérifier (*) si $1 < p < 2$ et $f > 0$.

VII. Dans toute cette partie, on fixe $f \in \mathscr{C}^\infty$, $f > 0$ et $1 < p < 2$. La lettre C désigne une constante qui peut changer d'une formule à l'autre et qui ne dépend pas de f. On se propose d'établir (*). On fixe $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ tel que $p\gamma > \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 1. Montrer qu'il existe une fonction ψ holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ telle que $\breve{f} = e^\psi$ et $\psi(0) \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On pose $g = e^{p\psi}$. Montrer que (*) équivaut à (**) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(e^{\imath t})| dt \leq C \|f\|_{L^p}^p$.
Dans la suite, on établit (**).

Exercice 3. Soient $A = \{t \in [0, 2\pi]\ ; |\mathrm{Im}\ \psi(e^{\imath t})| < \gamma\}$ et $B = [0, 2\pi] \setminus A$. Montrer que :

a) Si $t \in A$, alors $|\breve{f}(e^{\imath t})| < \dfrac{\mathrm{Re}\ \breve{f}(e^{\imath t})}{\cos\gamma}$;

b) Si $t \in B$, alors $|g(e^{\imath t})| \leq \dfrac{\mathrm{Re}\ g(e^{\imath t})}{\cos p\gamma}$ et $\mathrm{Re}\ g(e^{\imath t}) < 0$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ g(e^{\imath t}) dt = (2\pi)^{1-p} \left(\int_0^{2\pi} f(t) dt \right)^p$.

Exercice 4. En déduire :

a) $\displaystyle\int_A |g(e^{\imath t})| dt \leq \frac{2\pi}{\cos^p \gamma} \|f\|_{L^p}^p$;

b) $\displaystyle\int_B |\mathrm{Re}\ g(e^{\imath t})| dt \leq \frac{2\pi}{\cos^p \gamma} \|f\|_{L^p}^p$.

Exercice 5. Conclure.

Fin de l'histoire : si on se donne $f \in L^p$, la somme de Cesaró $F_n(f)$ converge vers f dans L^p. À l'exception du cas $p = \infty$, où il faut remplacer L^∞ par $\mathscr{C}$.
La situation est moins bonne si on étudie la convergence des sommes de Fourier $S_n(f)$. Il n'y a pas convergence si $p = 1$ ou $p = \infty$ (même si on remplace L^∞ par $\mathscr{C}$). En revanche, il y a convergence dans L^p si $1 < p < \infty$.
Conséquence : si $f \in L^p$, avec $1 < p < \infty$, alors, quitte à passer à une sous-suite (n_k) - dépendant, en principe, de f- on a $S_{n_k}(f) \to f$ p. p. Néanmoins, il n'est pas clair si $S_n(f) \to f$ p. p. La *conjecture de Luzin* affirme que la réponse est positive. Cette conjecture a été confirmée pour $p = 2$ par Carleson en 1966 et par Hunt en 1968 pour $1 < p < \infty$. Cas particulier : si $f \in \mathscr{C}$, alors $S_n(f) \to f$ p. p.

Pour $p = 1$, on sait que $S_n(f) \not\to f$ dans L^1. Néanmoins, on pourrait avoir $S_n(f) \to f$ p. p. La réponse est négative (*théorème de Kolmogorov*) : il existe $f \in L^1$ telle que, pour tout x, $S_n(f)(x) \not\to f(x)$.
Un livre passionnant à ce sujet : Yitzhak KATZNELSON, An introduction to harmonic analysis, Dover, 1976.