Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Base de Haar

Exercice 1. On considère la famille de fonctions H_p définies sur $[0,1]$ par $H_0 = 1$ et pour $1 \leq k \leq 2^n$

$$H_{2^n+k-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2^n}}{2} & \text{si } x = (2k-2)2^{-n-1} \\ \sqrt{2^n} & \text{si } x \in](2k-2)2^{-n-1}, (2k-1)2^{-n-1}[\\ -\sqrt{2^n} & \text{si } x \in](2k-1)2^{-n-1}, 2k\,2^{-n-1}[\\ -\dfrac{\sqrt{2^n}}{2} & \text{si } x = 2k2^{-n-1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Démontrer que H_p est un système orthonormé de $L^2(0,1)$.

b) Soit $f \in L^2(0,1)$ telle que pour tout p, $\displaystyle\int_0^1 fH_p = 0$. On pose $F(y) = \displaystyle\int_0^y f(x)\,dx$.

i) Démontrer que si $1 \leq k \leq 2^n$, alors on a

$$-F\Big(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\Big) + 2F\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big) - F\Big(\frac{2k}{2^{n+1}}\Big) = 0.$$

ii) En déduire que $F = 0$.

iii) Montrer que les H_p forment une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Dans la suite on notera, pour chaque fonction f intégrable sur $[0,1]$,

$$\widehat{f}_p = \int_0^1 f(x)H_p(x)\,dx, \qquad s_p(f)(x) = \sum_0^p \widehat{f}_q H_q(x).$$

c) On note $\mathfrak{I}_p$ l'ensemble des intervalles ouverts maximaux sur lesquels toutes les fonctions H_q, $q \leq p$, sont constantes : si $p = 2^n + k - 1$ avec $1 \leq k \leq 2^n$,

$$\mathfrak{I}_p = \Big\{\Big]\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}\Big[\Big\}_{1\leq j\leq 2k} \bigcup \Big\{\Big]\frac{2(j-1)}{2^{n+1}}, \frac{2j}{2^{n+1}}\Big[\Big\}_{k+1\leq j\leq 2^n}.$$

Soit de plus F_p l'ensemble des fonctions définies sur $]0,1[$ constantes sur chaque intervalle de $\mathfrak{I}_p$ et telles que

$$2f(x) = f(x_+) + f(x_-) \qquad \forall x \in]0,1[,$$

où $f(x_\pm)$ représentent les limites à gauche et à droite. Démontrer que $(H_q)_{q\leq p}$ est une base de F_p.

d) Soit $f \in L^1(0,1)$.

i) Soit $p \in \mathbb{N}$. On note par f^* l'élément de F_p dont la valeur constante sur chaque intervalle I de $\mathfrak{I}_p$ est égale à la moyenne de f sur cet intervalle : $\frac{1}{l(I)}\displaystyle\int_I f$. Démontrer que pour tout entier naturel $q \leq p$, $\widehat{f}_q = \widehat{f^*_q}$. En déduire que $s_p(f) = s_p(f^*)$.

ii) En déduire que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout intervalle $I \in \mathfrak{I}_p$,

$$s_p(f)(t) = \frac{1}{l(I)} \int_I f(x)\,dx \qquad \forall t \in I.$$

e) Soit $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

i) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $I \in \mathfrak{I}_p$, il existe un point $x_I \in I$ tel que

$$s_p(f)(t) = f(x_I) \qquad \forall t \in I.$$

ii) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\max_{x\in[0,1]} |s_p(f)(x) - f(x)| \leq \sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in [0,1],\ |x - y| \leq \frac{2}{p}\}.$$

iii) En déduire que la série $\sum \widehat{f}_q H_q$ converge uniformément vers f dans $[0,1]$.

f) Montrer que l'ensemble des $H_p \otimes H_q$ forme une base hilbertienne de $L^2((0,1)^2)$.

g) Soit K un noyau dans $L^2((0,1)^2;\mathbb{C})$. On introduit l'opérateur

$$L^2(0,1) \ni f \mapsto Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

i) Montrer que T est un opérateur continu sur $L^2(0,1)$ et que sa norme vérifie

$$\|T\| \leq \Big(\sum_0^\infty \|TH_p\|_{L^2}^2\Big)^{1/2} = \|K\|_{L^2((0,1)^2)}.$$

ii) Identifier l'adjoint T^* de T.

iii) En utilisant la décomposition dans la base de Haar, montrer que T est un opérateur compact sur $L^2(0,1)$. (Indication : on pourra montrer que $TP_n \to T$, où P_n est le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par $H_0, \dots, H_n$.)

Mots clés associés à cette feuille : Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. Opérateur adjoint, opérateur compact.

À lire :

Brezis, Haïm, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Dunod, 2005. ISBN : 2100493361.