Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Interpolation. Convolution

Exercice 1. (*Lemme des trois droites de Hadamard*) Soit $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction continue , où B désigne la bande verticale $\{z \in \mathbb{C}\,;\mathrm{Re}\, z \in [0,1]\}$. On suppose en outre que f est bornée sur B et holomorphe sur la bande ouverte $\mathring{B}$. On note M_0, resp. M_1, un majorant strictement positif de $|f|$ sur la droite $\imath\mathbb{R}$, resp. sur la droite $1+\imath\mathbb{R}$. L'objectif est de montrer l'inégalité

$$|f(z)| \leq M_0^{1-\mathrm{Re}\, z}\, M_1^{\mathrm{Re}\, z},\ \forall\, z \in \overline{B}.$$

a) En introduisant une fonction auxiliaire appropriée, montrer que l'on peut supposer sans perte de généralité que $M_0 = M_1 = 1$. On fait cette hypothèse désormais.

b) Démontrer le résultat en supposant de plus que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. [Indication : utiliser le principe du maximum (cf Rudin, théoréme 10.24 p. 254).]

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(z) = f(z)\,\mathrm{e}^{z^2/n}\,\mathrm{e}^{-1/n}$. Montrer que f_n reléve du cas précédent et conclure.

Exercice 2. (*Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin*) Soient (Ω,μ) et (U,ν) deux espaces mesurés, et des opérateurs linéaires continus

$$T_0 : L^{p_0}(\Omega, d\mu) \to L^{q_0}(U, d\nu), \quad \text{de norme } M_0,$$

$$T_1 : L^{p_1}(\Omega, d\mu) \to L^{q_1}(U, d\nu), \quad \text{de norme } M_1,$$

pour $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1,+\infty]$, $p_0 \neq p_1$. On suppose que T_0 et T_1 coïncident sur $F := L^{p_0}(\Omega,d\mu) \cap L^{p_1}(\Omega,d\mu)$. L'objectif est de montrer que $T := (T_0)_{|F} = (T_1)_{|F}$ se prolonge en une (unique) application linéaire continue

$$\widetilde{T} : L^p(\Omega, d\mu) \to L^q(U, d\nu)\,, \quad \text{de norme } M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

pour $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$, quel que soit $\theta \in]0,1[$.

a) On note q' l'exposant conjugué de q, défini par $\dfrac{1}{q'} = 1 - \dfrac{1}{q}$. On note aussi $\langle h, g\rangle = \displaystyle\int_U h(y)g(y)\,d\nu$ dès lors que cette intégrale a un sens, c'est-à-dire si $hg \in L^1(U,d\nu)$. Montrer qu'il suffit de vérifier l'inégalité$|\langle Tf, g\rangle| \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$, quelles que soient les fonctions étagées $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_{L^p(\Omega,d\mu)} = \|g\|_{L^{q'}(U,d\nu)} = 1$.

b) Pour $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$ étagées et pour $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$, on pose

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

$$\varphi(x,z) = f(x)|f(x)|^{p/p(z)\,-\,1},\ \psi(y,z) = g(y)|g(y)|^{q'/q(z)'\,-\,1}.$$

Montrer que l'expression $F(z) = \langle T\varphi(\cdot,z), \psi(\cdot,z)\rangle$ définit une fonction F vérifiant les hypothéses du lemme des trois droites de Hadamard.

c) Conclure.

Quelques définitions. Pour des fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que l'intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue) ait un sens. Dans tout ce qui suit, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$, et pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de A, valant 1 dans A et 0 en dehors.

Exercice 3. (*Construction de « plateaux »*) On commence par se placer dans $\mathbb{R}$ (cas $n = 1$).

a) Pour tout $a > 0$ on définit $H_a := \dfrac{1}{a}\mathbb{1}_{[0,a]}$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite sommable de nombres strictement positifs. On pose $u_n = H_{a_0} * H_{a_1} * \ldots * H_{a_n}$. Montrer que (u_n) converge uniformément vers une fonction positive $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} u = 1$.

b) Montrer que pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ bien choisi, $v = \mathbb{1}_I * u$ vérifie :
(i) $v \geq 0$;
(ii) $v = 1$ au voisinage de 0.

c) Avec v comme dans la question précédente, soit $w(x) = v(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (avec $\| \ \|$ la norme euclidienne). Montrer que $w \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

d) Montrer qu'il existe un *noyau régularisant*, c'est-à-dire une fonction $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :
(i) $\rho \geq 0$;
(ii) supp $\rho \subset B(0,1)$;
(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$.
Si ρ est un noyau régularisant, on pose $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Quelles sont les propriétés de ρ_ε ?

e) Soit $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, K étant un compact, U un ouvert. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :
(i) $0 \leq \psi \leq 1$;
(ii) $\psi = 1$ sur K ;
(iii) supp $\psi \subset U$.

Exercice 4. (*Convolution dans les espaces L^p*)

a) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$. [Indication : utiliser le cas $p = 1$ et l'inégalité de Hölder.]

c) (*inégalité de Young*) Soient $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$.
Montrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^p}$, avec $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. [Indication : utiliser le cas $q = 1$, $r = p$, le cas $r = \infty$, $q = p'$, et le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.] Montrer que $f * g = g * f$.

d) Soient $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g$ pour tout n-uplet α.

e) Pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, On définit supp f comme le plus petit fermé F tel que $f = 0$ p. p. en dehors de F.
Montrer que supp$f$ est bien défini.
Si f est continue, montrer que supp f coïncide avec $\overline{\{x \ ; \ f(x) \neq 0\}}$.
Si f, g sont comme dans a) ou b) ou c), alors supp $f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$.

Exercice 5. (*Densité dans L^p*) On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ et de la mesure de Lebesgue λ_n.

a) Soient $B \subset \mathbb{R}^n$ un borélien tel que $\lambda_n(B) < \infty$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et un borélien A tels que :
(i) $|\zeta - \mathbb{1}_B| \leq \mathbb{1}_A$;
(ii) $\lambda_n(A) < \varepsilon$.
[Indication : utiliser l'exercice 3 e) et le fait que la mesure de Lebesgue est *régulière*.]

b) Montrer que l'on peut remplacer « borélien » par « Lebesgue mesurable » dans la question précédente.

c) Soit $1 \leq p < \infty$. L'ensemble $C_c(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (conséquence du théorème de Lusin, voir [Rudin, Théoréme 3.14 p. 84]). Peut-on en dire autant si $p = \infty$?

d) Soient ρ_ε le noyau régularisant de l'exercice 3 d), et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer que $f * \rho_\varepsilon \to f$ dans L^p, puis que $f_\varepsilon := (\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f) * \rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et tend vers f dans L^p.

e) Pour $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $\psi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :
(i) $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$;
(ii) $\psi_\varepsilon(x) = 1$ si $|x| \leq 1/\varepsilon$;
(iii) $\psi_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq 2/\varepsilon$.
Montrer que, pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\psi_\varepsilon \cdot (f * \rho_\varepsilon) \to f$ dans L^p quand $\varepsilon \to 0$.

f) Montrer que, pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $\psi_\varepsilon \cdot (f * \rho_\varepsilon) \to f$ dans L^∞ quand $\varepsilon \to 0$ si et seulement si $f = g$ p. p., avec $g \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} g(x) = 0$.

g) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$ et q l'*exposant conjugué* de p. Montrer que $f * g$ coïncide presque partout avec une fonction continue.

Exercice 6. (*Partition de l'unité*) Soient $K, U_1, \ldots, U_l \subset \mathbb{R}^n$, avec K compact, U_j ouvert, $\forall\, j$, et $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_l$. Montrer qu'il existe $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, l$, telles que :
(i) $0 \leq \psi_j \leq 1$;
(ii) $\operatorname{supp} \psi_j \subset U_j$;
(iii) $\sum \psi_j(x) \leq 1$, avec égalité si $x \in K$.

Exercice 7. (*Classe de Schwartz*) On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \text{où } x^\beta := x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n},\ \partial^\alpha \varphi := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots, \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi.$$

a) Montrer que les $p_{\alpha\beta}$ sont des semi-normes.

b) On munit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie induite par les semi-normes $p_{\alpha\beta}$. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est séparé et complet.

c) Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est métrisable.

d) Montrer que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

e) Etablir l'inclusion : $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Révisions associées à cette feuille :

Principe du maximum.

Mesure de Lebesgue. Espaces L^p, inégalité de Hölder, convolution.
Semi-normes. Espaces métriques.

Ouvrages recommandés :

• Rudin, W. *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices* . 3e édition (22 mai 2009), Dunod Collection : Sciences Sup, ISBN-10 : 2100534475, ISBN-13 : 978-2100534470
• Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. Reprint of the second (1990) edition. Classics in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2003. x+440 pp. ISBN : 3-540-00662-1. Pages 14–20.
• Zuily, C. et Queffélec, H. *Eléments d'analyse pour l'agrégation. Collection : Capes - Agreg.* Masson, 1996, 480 pp. ISBN-10 : 222584884X. ISBN-13 : 978-2225848841. Pages 311–325 et 467–474.