Préparation à l'Agrégation 2013–2014
Préparation à l'Écrit d'Analyse

Interpolation. Convolution

-corrigé partiel-

$\boxed{\text{Exo 5}}$ $\boxed{d)}$ $f * \rho_\varepsilon \to f$ ds $L^p(\mathbb{R}^n)$

$*$ Supposons d'abord $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors $\operatorname{supp} f * \rho_\varepsilon \subset \overline{K + B(0,\varepsilon)} \subset \overline{K + \overline{B}(0,\varepsilon)} = K + \overline{B}(0,\varepsilon)$, où $K := \operatorname{supp} f$. Soit $L := K + \overline{B}(0,1)$, qui est un compact. Alors $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur L quand $\varepsilon \to 0$ (1), et donc :

$\forall \varepsilon < 1$, $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(L)} \leq (\lambda_n(L))^{1/p} \max\limits_{L} |f * \rho_\varepsilon - f| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

$*$ Preuve de (1) : On a, si $x \in L$: $\varepsilon < 1$:

$$f * \rho_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy - f(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} [f(x-y) - f(x)]\rho_\varepsilon(y)\,dy \Rightarrow |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)|$$

$$\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)|\rho_\varepsilon(y)\,dy \leq \sup_{\substack{z \in L \\ |t-z| \leq \varepsilon}} |f(z) - f(t)| \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\,dy = \sup_{\substack{z \in L \\ |t-z| \leq \varepsilon}} |f(z) - f(t)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \quad \square$$

* Passons au cas général, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\begin{cases} \delta > 0 \\ g \in C_c(\mathbb{R}^n) \end{cases}$ tq $\|f-g\|_{L^p} < \delta$. Alors :

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|f*\rho_\varepsilon - g*\rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g-f\|_{L^p} \leq (\text{Young}) \; \underbrace{\|f-g\|_{L^p}}_{<\delta} \underbrace{\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}}_{=1} + \|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p} + \delta < 2\delta + \|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p}.$$

De ce qui précède, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq $\|g*\rho_\varepsilon - g\|_{L^p} < \delta$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$. D'où $\|f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p} < 3\delta$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, et donc $f*\rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ ds L^p. $\square$

<u>$f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$</u>

On a $|\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f| \leq |f|$, d'où $\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f \in L^p$.

Comme $\mathrm{supp}\, \mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f \subset \overline{B}(0,1/\varepsilon)$, nous obtenons $\mathrm{supp}\, f_\varepsilon \subset \overline{\overline{B}(0,1/\varepsilon) + B(0,\varepsilon)} \subset \overline{B}(0, 1/\varepsilon + \varepsilon)$. Donc f_ε est à support compact. Par ailleurs,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f \in L^p \subset L^1_{loc} \\ \rho_\varepsilon \in C_c^\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f_\varepsilon \in C^\infty.$$

D'où $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\square$

<u>$f_\varepsilon \longrightarrow f$ ds L^p</u>

On a $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \underbrace{\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} + \|f_\varepsilon - f*\rho_\varepsilon\|_{L^p}$.

Il suffit donc de mq $\|f_\varepsilon - f*\rho_\varepsilon\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Or, $\|f_\varepsilon - f*\rho_\varepsilon\|_{L^p} \underset{(\text{Young})}{\leq} \|\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} f - f\|_{L^p}$

$\underbrace{\|\rho_\varepsilon\|_{L^1}}_{=1} = \|(\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} - 1) f\|_{L^p}$.

Par convergence dominée, nous avons $(\mathbb{1}_{B(0,1/\varepsilon)} - 1) f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ ds L^p. D'où la conclusion. $\square$

$\boxed{\text{e)}}$ Existence de Ψ_ε

Il suffit de considérer un plateau (cf Exo 3 e)) avec $K = \overline{B}(0, 1/\varepsilon)$ et $U = B(0, 2/\varepsilon)$. $\square$

Convergence de $\Psi_\varepsilon \cdot f*\rho_\varepsilon$

On a $\|\Psi_\varepsilon f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|\Psi_\varepsilon f*\rho_\varepsilon - \Psi_\varepsilon f\|_{L^p} + \|(\Psi_\varepsilon - 1) f\|_{L^p} \leq \underbrace{\|\Psi_\varepsilon\|_{L^\infty}}_{=1} \underbrace{\|f*\rho_\varepsilon - f\|_{L^p}}_{\to 0 \text{ qd } \varepsilon\to 0}$

$+ \|\underbrace{(\Psi_\varepsilon - 1) f}\|_{L^p}$ qd $\varepsilon \to 0$ par convergence dominée.

$\boxed{f)}$ "$\Leftarrow$" Soit $\delta > 0$. Soit $R > 0$ tq $|g(x)| < \delta$, $\forall x$ tq $|x| \geq R$. Posons $K := \overline{B}(0, R+1)$

Si $\begin{cases} 0 < \varepsilon < 1, \\ |x| \geqslant R+1 \end{cases}$ alors $|f * \rho_\varepsilon(x)| = |g * \rho_\varepsilon(x)| =$

$$\left| \int_{|y|<\varepsilon} g(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy \right| \leq \int \underbrace{|g(x-y)|}_{<\delta, \text{ car } |x-y| \geqslant R} \rho_\varepsilon(y)\,dy$$

$< \delta \int \rho_\varepsilon(y)dy = \delta$.

Donc $|g * \rho_\varepsilon - g| < 2\delta$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, R+1)$. (si $\varepsilon < 1$)

Par ailleurs, $g * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g$ uniformément sur $\overline{B}(0, R+1)$ (voir question d)). D'où $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < 2\delta$ pour ε petit.

Si, de plus, $\varepsilon < \frac{1}{R+1}$, alors $g * \rho_\varepsilon - g =$ $\psi_\varepsilon (g * \rho_\varepsilon - g)$ sur $\overline{B}(0, R+1)$, et

$|\psi_\varepsilon (g * \rho_\varepsilon) - g| \leq |g * \rho_\varepsilon| + |g| < 2\delta$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, R+1)$,

d'où $\|\psi_\varepsilon (f * \rho_\varepsilon) - f\|_{L^\infty} = \|\psi_\varepsilon (f * \rho_\varepsilon) - g\|_{L^\infty} < 2\delta$ pour ε petit. $\square$

"$\Rightarrow$" Soit $g_j := \Psi_{1/j}\, f * \rho_{1/j}$. Alors $g_j \to f$ ds L^∞, et donc (g_j) est une suite de Cauchy ds $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $(g_j) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$, et que $\|h\|_{L^\infty} = \sup |h|$, $\forall h \in C_b(\mathbb{R}^n)$, on trouve que (g_j) est une suite de Cauchy ds $C_0(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme. $C_0(\mathbb{R}^n)$ étant complet, $\exists g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tq $g_j \to g$. On obtient $\|g_j - g\|_{L^\infty} \to 0$, d'où $f = g$ p.p. $\square$

N. B. : $C_0(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C(\mathbb{R}^n) ;\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \}$.

$C_b(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C(\mathbb{R}^n) ;\ f \text{ bornée} \}$.

$\boxed{g)}$ Soit (à g fixé) $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Tf = f * g$. Alors (Young) $\|T\| \leq \|g\|_{L^q}$. Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $Tf \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$. T étant continue, on a:

$$T(L^p(\mathbb{R}^n)) = T\left(\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^p} \right) \subseteq \overline{T(C_c^\infty(\mathbb{R}^n))}^{L^\infty}$$

$$\subset \overline{C_b(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty} = C_b(\mathbb{R}^n),$$ car C_b est complet.

Donc : $\forall f \in L^p$, $\exists h \in C_b(\mathbb{R}^n)$ tq $f * g = h$ p.p. $\square$

Exo 6

Rappelons le

<u>Lemme (Lebesgue)</u>. Si $K \subset \bigcup_{j\in J} U_j$, avec K compact, U_j ouverts dans un espace métrique X, alors $\exists\, \delta > 0$ tq.

$\forall x \in K, \exists\, j \in J$ tq $B(x,\delta) \subset U_j$

(δ est la "constante de Lebesgue" du recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de K).

Reformulation équivalente, posons $F_{j,\delta} := \{x \in X ; \mathrm{dist}(x, U_j^c) \geq \delta\}$

Alors $K \subset \bigcup_{j\in J} F_{j,\delta}$ pour δ petit, ou encore $K = \bigcup_{j\in J} K_{j,\delta}$, avec $K_{j,\delta} := K \cap F_{j,\delta}$; $K_{j,\delta}$ est compact $\subset U_j$.

Dans notre cas, soit $L_j := K_{j,\delta}$ (δ petit). Soit ζ_j un plateau relatif à L_j et U_j (càd $\zeta_j \in C_c^\infty(U_j)$, $0 \leq \zeta_j \leq 1$, $\zeta_j = 1$ sur L_j). Posons

$\psi_1 = \zeta_1$, $\psi_2 = \zeta_2(1-\zeta_1)$, ..., $\psi_\ell = \zeta_\ell(1-\zeta_1)\dots(1-\zeta_{\ell-1})$.

Alors clairement (?) $\psi_j \in C_c^\infty(U_j)$ et $0 \leq \psi_j \leq 1$.

Finalement, $\sum \psi_j =$ (vérifier !) $1-(1-\zeta_1)\dots(1-\zeta_\ell)$,

d'où : $\forall x \in K, \exists\, j_0$ tq $x \in L_{j_0} \Rightarrow (1-\zeta_{j_0})(x) = 0$

$\Rightarrow \sum_j \psi_j(x) = 1$. $\square$