Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Intégration numérique

Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Etant donnés :

(i) Une subdivision $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, c'est-à-dire $x_0, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;

(ii) Des points intermédiares, c'est-à-dire une collection $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout i,

la somme de Riemann associée à f, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est

$$\sigma(f;\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(y_i).$$

Le pas h de la subdivision $\mathbf{x}$ se définit comme $h := \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} (x_i - x_{i-1})$.

1. Si f est continue, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$h \le \eta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \,-\, \sigma(f;\mathbf{x},\mathbf{y}) \right| \le \varepsilon\,.$$

2. Si f est Lipschitzienne de constante L, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \,-\, \sigma(f;\mathbf{x},\mathbf{y}) \right| \le L(b-a)h.$$

On suppose dans toute la suite que la subdivision est uniforme, c'est-à-dire que $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$.

3. *Méthode des rectangles.* En prenant $y_i = x_i$, la somme de Riemann s'écrit

$$R_n^d(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big),$$

ce qui définit la méthode des rectangles à droite. Avec $y_i = x_{i-1}$, on obtient la somme de Riemann associée à la méthode des rectangles à gauche :

$$R_n^g(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big).$$

Si f est de classe C^1, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \,-\, R_n^{g,d}(f) \right| \le \|f'\|_\infty \, \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$, et appliquer la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 1 à une primitive de f.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale, au sens où elle devient égalité pour certaines fonctions non constantes (que l'on explicitera).

4. *Méthode du point milieu.* En prenant $y_i := a + (i - 1/2)h$, la somme de Riemann s'écrit

$$T_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est de classe C^2, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \, - \, T_n(f) \right| \leq \|f''\|_\infty \, \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$, et appliquer la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 1 à f entre t et $(a+b)/2$.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale, au sens où elle devient égalité pour les fonctions polynômiales du second degré.

5. *Méthode des trapèzes.* On pose

$$C_n(f) := \frac{R_n^g(f) + R_n^d(f)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \right).$$

Si f est de classe C^2, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \, - \, C_n(f) \right| \leq \|f''\|_\infty \, \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$, et montrer que la fonction $\widetilde{f} := f - g$, où g est la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$, vérifie $|\widetilde{f}(t)| \leq \|f''\|_\infty \,(t-a)(b-t)/2$.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale.

6. *Méthode de Simpson.* On pose

$$S_n(f) := \frac{C_n(f) + 2T_n(f)}{3} = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right).$$

Vérifier que cette méthode provient de l'approximation de f par un polynôme de degré deux sur chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$, polynôme coïncidant avec f en x_{i-1}, en x_i, et en $(x_{i-1}+x_i)/2$. Si f est de classe C^4, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \, - \, S_n(f) \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{90n^4} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

[Indication ; commencer par le cas $n = 1$, et appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $h/2$ à la fonction $t \mapsto F(c+t) - F(c-t) - t(F'(c+t) + F'(c-t) + 4F'(c))/3$, où $c = (a+b)/2$ et F est une primitive de f.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale.

Révisions associées à cette feuille :

Calcul approché d'intégrales. Formules de Taylor.

Ouvrage recommandé :

M. Schatzman. *Analyse numérique*, Dunod, 2011 (2^e^édition), chapitre *Quadrature*.