Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Semi-convergence

Exercice 1. (*L'Hospital et Cesàro-Stoltz*)

a) (*Règle de l'Hospital*) Soient $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :
(i) $g' > 0$;
(ii) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.
Montrer que, si la limite $\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors la limite $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et vaut aussi ℓ.

b) (*Théorème de Cesàro-Stoltz*) Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que :
(j) (b_n) est strictement croissante ;
(jj) $b_n \to \infty$.
Montrer que si la limite $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ existe, alors la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe et vaut aussi ℓ.

c) Citer un cas particulier d'application du théorème de Cesàro-Stoltz.

Exercice 2. (*Convergence simple, uniforme et normale*)

On considère la série de fonctions dont le terme général est $u_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}/\ln n$, $x \in I = [0, +\infty[$, $n \geq 2$.

a) Étudier la convergence simple de cette série sur I.

b) Montrer que la série n'est pas normalement convergente sur I.

c) Montrer que la série est uniformément convergente sur I.

Exercice 3. (*Abel*) Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes, et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) Pour $n > N$, exprimer $\sum_{k=N}^{n} a_k b_k$ en fonction des suites (A_n) et (b_n).

b) (*Théorème d'Abel*) En déduire que, si
(i) $b_n \to 0$,
(ii) $\sum_{n\geq 0} |b_{n+1} - b_n| < \infty$,
(iii) (A_n) est bornée,
alors $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

c) Cas particuliers ?

d) Généraliser ce qui précède à des suites (a_n), (b_n) à valeurs dans des espaces/algèbres de Banach.

e) (*Théorème d'Abel*) Soient $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{C}$ telles que :
(i) $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$,

(ii) $g \in \mathscr{C}^1$ et $\displaystyle\int_a^\infty |g'(t)|dt < \infty$,

(iii) f est continue et admet une primitive bornée F.

Alors $\displaystyle\int_a^\infty f(t)g(t)dt$ converge.

f) Cas particulier ?

Exercice 4. (*Série vs intégrale*)

a) Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,\infty[)$, avec $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{Z}$, $N > a$,

$$\sum_{n=a+1}^{N} f(n) = \int_a^N f(t)dt + \int_a^N \{t\}f'(t)dt\,,$$

où $\{t\} = t - [t] = t - E(t)$ représente la partie fractionnaire de t.

b) Si $\displaystyle\int_a^\infty |f'(t)|dt < \infty$, montrer que $\displaystyle\sum_a^\infty f(n)$ et $\displaystyle\int_a^\infty f(t)dt$ sont de même nature.

c) Cas particulier ?

Exercice 5. (*Commutativement=absolument, en dimension finie*)

a) Soit $\sum a_n$ une série absolument (c'est-à-dire normalement) convergente dans un espace de Banach. Montrer que la série est commutativement convergente et que la somme S_σ de $\sum a_{\sigma(n)}$ ne dépend pas de la permutation $\sigma \in S_\mathbb{N}$.

b) (*Théorème de Riemann*) Soit $\sum a_n$ une série réelle semi convergente (c'est-à dire la série est convergente, sans être absolument convergente). Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(a_n)^+$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(a_n)^-$ divergent, où $x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = \max(-x,0)$.

En déduire qu'il existe $\sigma \in S_\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} = +\infty$.

Plus généralement, si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, montrer qu'il existe $\sigma \in S_\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} = \ell$. De même, il existe $\sigma \in S_\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\leq N} a_{\sigma(n)}$ n'ait pas de limite lorsque $N \to +\infty$.

c) Montrer que dans tout espace vectoriel de dimension finie, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

d) En considérant, dans ℓ^2 ou ℓ^∞, la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}(\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$, montrer que le résultat n'est plus vrai en dimension infinie.

Révisions associées à cette feuille :

Limites de suites et de fonctions. Critère de Cauchy.
Théorème des accroissements finis (généralisé) pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
« Intégration par parties » (discrète et continue).
Convergence uniforme des suites de fonctions. Lemme de Dini.

Convergence, convergence absolue des séries numériques. Convergence simple, uniforme, normale des séries de fonctions.

Séries géométriques. Séries de Bertrand.

Intégrales semi-convergentes. Comparaison séries-intégrales.

Ouvrage recommandé :

Dieudonné, J. *Calcul infinitésimal.* 2e édition revue et augmentée. Collection : Méthodes Hermann, Paris, 1980. 479 pp. ISBN : 2-7056-5907-2

Lecture supplémentaire. (*Théorème de Steinitz*) Soit E un espace normé de dimension finie. Soit $\sum a_n$ une série semi-convergente. On considère l'ensemble

$$S = \left\{ x \in E \,;\, \exists\, \sigma \in S_{\mathbb{N}} \text{ telle que } \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} = x \right\}.$$

Alors S est convexe. (Notons que, si $E = \mathbb{R}$, alors $S = \mathbb{R}$, d'après le deuxième théorème de Riemann de l'exercice 5.)

Pour la preuve de ce résultat, voir par exemple les sections 5 et 6 du premier chapitre du livre

Gonnord, S., Tosel, N. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation. Topologie et Analyse fonctionnelle.* Ellipses. Collection : Math/Agrég, Paris, 1996. 160 pp. ISBN : 2-7298-9694-5