Université Lyon 1
Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Préparation à l'écrit d'Analyse et Probabilités
Année 2013-2014

Séries entières

Exercice 1. (*Limite supérieure et limite inférieure*)

a) Pour toute suite réelle (u_n), on définit dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\lim}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \sup\{u_p\,;\,p \geq n\}\,, \quad \underline{\lim}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \inf\{u_p\,;\,p \geq n\}\,,$$

(la borne supérieure d'un ensemble non majoré, resp. non minoré, étant $+\infty$, resp. $-\infty$). Montrer que

$$\inf\{u_n\,;\,n \in \mathbb{N}\} \leq \underline{\lim}(u_n) \leq \overline{\lim}(u_n) \leq \sup\{u_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}\,,$$

$$\overline{\lim}(u_n) = \underline{\lim}(u_n) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lim(u_n) = \lambda\,,$$

et que $\overline{\lim}(u_n)$, resp. $\underline{\lim}(u_n)$, est la plus grande, resp. plus petite, valeur d'adhérence de (u_n).

b) Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables. On suppose que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ μ-presque partout dans X et que $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)|\,d\mu = \int_X |f(x)|\,d\mu$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\,d\mu = 0$. *Indication :* appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions (g_n) définies par $g_n(x) := |f(x)| + |f_n(x)| - |f(x) - f_n(x)|$.

Exercice 2. (*Exemples de séries de Fourier*)

a) Calculer les coefficients de Fourier des fonctions 1-périodiques définies par

$$\begin{cases} f(x) = 1\,, & g(x) = x\,, & \text{pour } x \in [0, 1/2[\,, \\ f(x) = -1, & g(x) = 1 - x\,, & \text{pour } x \in [1/2, 1[\,. \end{cases}$$

b) *Démontrer* (sans utiliser de théorème général) que leurs séries de Fourier convergent en tout point, et que celle de g est normalement convergente (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

c) Expliquer pourquoi la convergence de la série de Fourier de g est meilleure que celle de f.

Exercice 3. (*Séries entières/séries de Fourier*)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.

a) Soit r avec $0 < r < R$. Montrer que la série de terme général $a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ converge uniformément pour $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Calculer (en fonction de a_n et r) le $n-$ème coefficient de Fourier de l'application périodique $\theta \longmapsto f(r\mathrm{e}^{i\theta})$, où $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

c) Établir les *inégalités de Cauchy* :

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

d) Application : on suppose $R = 1$, et qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que $|f(z)| \leq C(1-|z|)^{-\alpha}$ pour $|z| < 1$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|a_n| \leq K n^{\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. (*Séries de Dirichlet*) Soient (a_n) une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. On considère la série de terme général $u_n(z) := a_n\, n^{-z}$ et l'on définit dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\sigma_c := \inf\Big\{x \in \mathbb{R}\,;\ \sum u_n(x) \text{ est convergente}\Big\},$$

$$\sigma_a := \inf\Big\{x \in \mathbb{R}\,;\ \sum u_n(x) \text{ est absolument convergente}\Big\}.$$

a) Montrer que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$, et donner des exemples de suites (a_n) pour lesquelles $\sigma_c = \sigma_a$ ou $\sigma_a = \sigma_c + 1$.

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum u_n(z_0)$ est convergente. Montrer que $\sum u_n(z)$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathsf{Re}\, z > \mathsf{Re}\, z_0$.

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathsf{Re}\, z > \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est convergente, et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathsf{Re}\, z < \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est divergente.

d) Montrer que la fonction $u : z \mapsto u(z) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C};\ \mathsf{Re}\, z > \sigma_c\}$.

Révisions associées à cette feuille :

Limites supérieure, inférieure. Lemme de Fatou.
Séries de Fourier et formule de Parseval.
Rayon de convergence des séries entières. Séries dépendant d'un paramètre. Équations de Cauchy-Riemann.

Ouvrage recommandé :
Rudin, W. *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices* . 3e édition (22 mai 2009), Dunod Collection : Sciences Sup, ISBN-10 : 2100534475, ISBN-13 : 978-2100534470