Université Claude Bernard Lyon 1
Licence STS
Année 2010-2011

Math I Analyse
Interrogation écrite, le 21 janvier 2011, de 8 heures à 10 heures

Question de cours

Enoncer le théorème des accroissements finis (théorème de Lagrange).

Exercice

Trouver l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(0) = 1$ et telle que

$$y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{\frac{1}{3}x^3},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On définit la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 2x + 3x^2 + \cdots nx^{n-1} - 1.$$

En particulier on a $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = 2x + 3x^2 - 1$ et $f_4(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 - 1$.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.
2. (**Question indépendante de la suite de l'exercice**) Montrer que f_n est une bijection de $[0, 1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$ et montrer que
$$f_n^{-1} : [f_n(0), f_n(1)] \to [0, 1]$$
est dérivable.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel $a_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$.

4. Calculer a_2 et a_3.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f_{n+1}(x) > f_n(x).$$

6. En déduire que $f_{n+1}(a_n) > 0$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
7. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
8. Notons a la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$. Montrer que $0 \leq a \leq \dfrac{1}{2}$.

Dans la suite du problème on va calculer la valeur de la limite a. On définit la fonction $g_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^n.$$

8. Montrer que $g_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
9. Montrer que $2 + f_n(x) = g_n'(x)$ et en déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$f_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n - 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}.$$

10. Sachant que $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \geq 2$, calculer

$$\lim_{n\to\infty} na_n^{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} (n+1)a_n^n \quad \text{et (en fonction de } a) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a_n).$$

11. Démontrer que a est racine de l'équation $2x^2 - 4x + 1 = 0$.
12. Calculer la valeur de a.