Math I Analyse 2011-2012

Devoir surveillé no 1 -le lundi 24 octobre 2011, durée 45 minutes

Exercice 1 Soit x un réel tel que $x > \sqrt{2} - 2$. On pose $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1. Le nombre $|x+1|$ vaut-il $x+1$ ou $-(x+1)$?

On a $x + 1 > \sqrt{2} - 2 + 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$. D'où $|x+1| = x+1$.

2. Vérifier que $\dfrac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-x}{x+1}$.

Comme $x + 1 \neq 0$ (car $x + 1 > 0$), les deux fractions sont bien définies. L'identité à montrer équivaut à $\left(y - \sqrt{2}\right)(x+1) = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-x\right)$, ce qui revient après calcul à $y(x+1) = x+2$, ou encore à la définition de y.

3. On suppose, de plus, que $x \neq \sqrt{2}$. Montrer que $|y - \sqrt{2}| < |x - \sqrt{2}|$.

En prenant les valeurs absolues dans l'identité de la question **2.**, on trouve

$$\left|y - \sqrt{2}\right| = \frac{\sqrt{2}-1}{x+1}\left|x - \sqrt{2}\right|.$$

Comme $|x - \sqrt{2}| > 0$ (car $x \neq \sqrt{2}$), pour conclure il suffit de montrer que $\dfrac{\sqrt{2}-1}{x+1} < 1$, ce qui revient à $\sqrt{2} - 1 < x + 1$ et découle de l'hypothèse $x > \sqrt{2} - 2$.

Exercice 2. Soit $A = \left\{\dfrac{k+1}{k+m}\,;\, k, m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que 1 est un majorant de A.

On a $\dfrac{k+1}{k+m} \leq 1 \iff m \geq 1$, et ceci est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

2. A a-t-il un maximum ? Un sup ? Si oui, calculer ces nombres.

1 est un majorant de A, et $1 = \dfrac{1+1}{1+1} \in A$, d'où 1 est le maximum de A. En particulier, $\sup A = 1$.

3. Montrer que $\inf A$ existe, et calculer cette quantité.

Si $x \in A$, alors $x > 0$, d'où 0 est un minorant de A. Par ailleurs, la suite $(x_m)_{m\geq 1}$ donnée par $x_m = \dfrac{1+1}{1+m}$ appartient à A et tend vers 0, d'où $\inf A = 0$.

4. A a-t-il un minimum ?

Si A a un minimum, alors ce minimum vaut $0 = \inf A$. Or, $0 \notin A$, car si $x \in A$, alors $x > 0$. Donc A n'a pas de minimum.

Exercice 3. Soit $r \in]0,1[$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$. On justifiera la réponse.

La preuve se fait par cas.

1. Si $r = 1$, alors $r^n = 1$ et la limite vaut 1.

2. Soit $r \in [0,1[$. Alors la suite (r^n) est décroissante et on a (1) $0 \leq r^n < 1$. Il s'ensuit que cette suite est décroissante et minorée, donc convergente. Soit l sa limite. De (1), on trouve $0 \leq l \leq 1$. Par ailleurs, la suite (r^{n+1}) étant une suite extraite de (r^n), on a

$rl = \lim_{n\to\infty} r\, r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \lim_{n\to\infty} r^n = l$. Comme $0 \le l \le 1$ et $0 \le r < 1$, la seule solution convenable de l'équation $l = rl$ est $l = 0$. Donc, dans ce cas, $r^n \to 0$.
3. Si $-1 < r < 0$, soit $\rho = -r \in]0, 1[$. Alors $-\rho^n \le (-1)^n \rho^n = r^n \le \rho^n$. En utilisant le théorème des gendarmes et le cas précédent, on trouve $r^n \to 0$.
4. Si $r > 1$, on peut raisonner comme dans le cas $0 \le r < 1$. Dans ce cas, la suite (r^n) est strictement croissante, et sa limite est $\ge r$. Comme $r > 1$, l'équation $rl = l$ n'a comme solution $\ge r$ que $l = \infty$, d'où $r^n \to \infty$.
5. Si $r = -1$, alors les suites extraites (r^{2n}) et (r^{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1, et donc la suite n'a pas de limite.
6. Si $r < -1$, soit $\rho = -r > 1$. Les suites extraites $(r^{2n}) = (\rho^{2n})$ et $(r^{2n+1}) = (-\rho^{2n+1})$ tendent respectivement vers ∞ et $-\infty$ (ici, on utilise le cas $r > 1$). Il s'ensuit que la suite (r^n) n'a pas de limite.

Bilan

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1, & \text{si } r = 1 \\ \infty, & \text{si } r > 1 \\ 0, & \text{si } -1 < r < 1 \\ \text{n'existe pas,} & \text{si } r \le -1 \end{cases}.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, a, b, c sont des réels positifs.
1. Montrer l'inégalité

$$a^3 - a^2 b + b^3 - ab^2 \ge 0. \tag{1}$$

(On pourra décomposer l'expression qui apparaît dans (1) comme produit de trois facteurs.)
On a

$$\begin{aligned} a^3 - a^2 b + b^3 - ab^2 &= (a^3 - a^2 b) + (b^3 - ab^2) = a^2(a-b) + b^2(b-a) \\ &= (a^2 - b^2)(a-b) = (a-b)(a+b)(a-b) = (a-b)^2(a+b) \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Résoudre l'équation $a^3 - a^2 b + b^3 - ab^2 = 0$.
De (2), l'équation revient à $a = b$ ou $a + b = 0$. Comme $a, b \ge 0$, l'égalité $a + b = 0$ revient à $a = b = 0$. Finalement, les solutions sont données par $a = b \ge 0$.
3. En utilisant (1), montrer l'inégalité

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{2}(a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2).$$

Il suffit d'écrire (1) pour les couples (a, b), (b, c) et (c, a), de sommer les trois inégalités ainsi obtenues, et de diviser le résultat par 2.
4. En utilisant la question **2.**, trouver toutes les solutions de l'équation

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2) = 0.$$

Le cas d'égalité revient à avoir l'égalité dans (1) pour chacun des couples (a, b), (b, c) et (c, a). De **2.**, ceci revient à $a = b = c \ge 0$.