Université Claude Bernard Lyon 1
Licence STS
Année 2011-2012

**Analyse 1 : les réels et les fonctions**
**Interrogation écrite, le 17 janvier 2012, de 14 heures à 16 heures**

## Question de cours

Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

## Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$, $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $y'(0) = 0$.

## Exercice 2

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est 0.
   (c) En déduire que de deux choses l'une : ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On suppose que $-1 \leq u_0 \leq 0$.
   (a) Montrer que, dans ce cas, on a $-1 \leq u_n \leq 0$, $\forall\, n \geq 0$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et calculer sa limite.
3. On suppose $u_0 > 0$. Dans ce cas, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On pourra utiliser par exemple la question 1.
4. Supposons $u_0 < -1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 0$.
   (b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans ce cas. On pourra utiliser par exemple la question 3.

**Exercice 3**

Dans ce qui suit, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{et } v_n = u_n - \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

1. Calculer $u_1, u_2, v_1, v_2$.
2. Pour $n \geq 1$, calculer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $n$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer la double inégalité
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.

**Exercice 4 : étude de la réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin x$**

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $g$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Montrer que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   (a) Montrer que $g$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ ; on justifiera ce fait.
   (b) En déduire que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin x$.
   (a) Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   (b) En déduire que $f$ est strictement croissante.
4. (a) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de $f$.
   (b) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5. (a) Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est continue.
   (b) Quels sont les points où $h$ est dérivable ?