Analyse 1 : les réels et les fonctions 2012-2013
Contrôle continu n°2 - le vendredi 7 décembre 2012, durée 45 minutes

NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :

Les copies seront jugées essentiellement sur la qualité des raisonnements et sur leur justification rigoureuse. Les calculs sans justification ne seront pas pris en compte. Barème indicatif sur 20 p.

Question de cours. (3 p.) Donner la caractérisation de la continuité avec ε et δ.
Donner la définition de la continuité uniforme.

Exercice 1. (3 p.)

1. Résoudre l'équation $y' = 2xy$.
2. Résoudre l'équation $y' = 2xy - 2x$ et le problème $\begin{cases} y' = 2xy - 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Tournez la page svp →

Exercice 2. (7 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$.
5. En déduire que f est dérivable en 0. Combien vaut $f'(0)$?

Tournez la page svp →

Exercice 3. (7 p.) Soit $k > 1$. Nous posons

$$x_n := \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}, \quad \text{pour } n = 2, 3, \ldots$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ a une limite. Nous notons cette limite $f(k)$.
2. Montrer successivement les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{(x+1)^k} < \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(x+1)^{k-1}} < \frac{1}{x^k}, \ \forall\, x > 0, \forall\, k > 1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{(k-1)n^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(n+1)^{k-1}} < \frac{1}{n^k} \quad \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{2}$$

$$\frac{1}{n^k} < \frac{1}{(k-1)(n-1)^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}}, \quad \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{(k-1)2^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(n+1)^{k-1}} < x_n < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}}, \ \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{4}$$

$$\frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \leq f(k) \leq \frac{1}{k-1}. \tag{5}$$

(Pour la preuve de (1), penser au théorème des accroissements finis.)

3. Calculer $\lim\limits_{k \searrow 1} (k-1) f(k)$.

Tournez la page svp →

Rappeller, svp :
NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :