Analyse 1 : les réels et les fonctions 2012-2013
Contrôle continu n°3 - corrigé

Exercice 1. Déterminer $\inf\ ]-1,1[$. On justifiera la réponse.
Soit $A :=]-1,1[$. -1 est minorant de A. Par ailleurs, soit $x_n := -1 + \dfrac{1}{n} \in A$, $\forall\, n \geq 1$. Nous avons $x_n \to -1$, d'où $-1 = \inf A$.
Exercice 2. Nous nous proposons de refaire la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.
Théorème de Leibniz sur les séries alternées. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante et telle que $a_n \to 0$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

Rappelons que, par définition, la convergence de la série revient à : si nous posons

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n,$$

alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

Pour prouver le théorème, posons $z_n := x_{2n}$ et $y_n := x_{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $z_{n+1} - z_n$ et montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   Nous avons $z_{n+1} - z_n = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   De même, nous avons $y_{n+1} - y_n = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$.
3. Montrer que les suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
   Nous avons $z_n - y_n = a_{2n+1} \to 0$, car $a_n \to 0$ et (a_{2n+1}) est une sous-suite de (a_n).
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.
   Les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergeant vers la même limite, la suite (x_n) converge, par recollement.

Exercice 3. Soit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x + x^2 + \cdots + x^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Etudier les variations de f_n sur $[0,\infty[$.
   f_n est dérivable et nous avons $f_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0$ sur $]0,\infty[$. Par ailleurs, $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$, d'où f_n croît strictement de la valeur 0 en 0 vers ∞ à l'infini.
2. En déduire qu'il existe un et un seul $x_n \in]0,\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
   Nous avons $f_n(0) < 1$ et $f_n(2) > 1$. L'existence de x_n suit du théorème des valeurs intermédiaires. Son unicité, de la monotonie stricte de f_n.
3. Combien vaut $f_{n+1}(x_{n+1})$? Montrer que $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.
   Nous avons $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$. Comme $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x > 0$, nous obtenons

$$f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) \implies f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}).$$

4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
   La fonction f_{n+1} étant strictement croissante, nous avons
$$f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1}) \implies x_n > x_{n+1}.$$
5. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
   La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0.
   Notons $l := \lim_{n\to\infty} x_n$.
6. Montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
   Nous avons
$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$
7. En déduire que $x_n > \dfrac{1}{2}$ et que $l \geq \dfrac{1}{2}$.
   Nous obtenons $f_n(1/2) < 1 = f_n(x_n)$, d'où $x_n > 1/2$.
8. Soit a tel que $\dfrac{1}{2} < a < 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \dfrac{a}{1-a} > 1$.
   Comme pour le calcul de $f_n(1/2)$, nous trouvons
$$f_n(a) = a + a^2 + \cdots + a^n = a\frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a}{1-a}(1-a^n) \to \frac{a}{1-a} \text{ quand } n \to \infty.$$
   L'inégalité $a/(1-a) > 1$ suit de $a \in]1/2, 1[$.
9. En déduire que, pour un tel a, il existe n_0 tel que $f_n(a) > 1$, $\forall\, n \geq n_0$. En déduire que $x_n < a$, $\forall\, n \geq n_0$, et que $l \leq a$.
   La première partie suit de $\lim_{n\to\infty} f_n(a) > 1$. Pour la deuxième partie, nous notons que
$$n \geq n_0 \implies f_n(a) > 1 = f_n(x_n) \implies x_n < a.$$
   En passant à la limite l'inégalité $x_n < a$, $\forall\, n \geq n_0$, nous obtenons $l \leq a$.
10. En déduire que $l = \dfrac{1}{2}$.
    Nous avons $l \leq a$, $\forall\, a > 1/2$. En particulier, $l \leq 1/2 + 1/n$, $\forall\, n \geq 1$, d'où (par passage à la limite) $l \leq 1/2$. Par ailleurs, nous savons que $l \geq 1/2$, d'où $l = 1/2$.