Contrôle continu final
Analyse I

14 Janvier 2012 – Durée 2h

La qualité de la rédaction et la présentation seront notées sur **2 points**.

1 Exercice 1 (1 pt)

Question de cours : Rappelez ce qu'est une suite de Cauchy et le lien entre suites convergentes et suites de Cauchy.

2 Exercice 2 (8 pts)

(Les parties 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes)

On se donne une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on construit la suite

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n \,.$$

On désire étudier la convergence de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans certains cas.

1) Soit q un réel fixé. On pose $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrez que

$$V_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

pour $q \neq 1$. Que vaut V_n pour $q = 1$?

b) En distinguant les cas $|q| < 1$, $q > 1$, $q < -1$, $q = -1$ et $q = 1$, dire si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et quelle est sa limite, le cas échéant.

2) On pose maintenant $u_n = 1/n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.

a) Montrez que $V_{2n} - V_n > 1/2$ pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

3) On pose maintenant $u_n = 1/n^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.

a) Montrez que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrez par récurrence que $V_n \leq 2 - 1/n$ pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) On revient au cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générale. Montrez que si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers une limite finie) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (Aide : regardez $V_{n+1} - V_n$).

3 Exercice 3 (12 pts)

(Les parties 1), 2), 3), 4), 5) et 6) sont indépendantes)

On se propose d'étudier la fonction

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x = e^{x\ln(|x|)} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}$.

1) a) Etudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Quelle est la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$?

2) Etudiez la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Montrez que la dérivée de f en tout point de $\mathbb{R}^*$ est

$$f'(x) = (1 + \ln(|x|))\, e^{x\ln(|x|)}\,.$$

3) a) Montrez que la fonction f atteint un maximum local et un minimum local, que l'on précisera, en deux points a et b, respectivement, que l'on précisera.

b) Montrez que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

4) Décrire la solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = (1 + \ln(x))\, y\,,$$

avec $y(1) = 2$.

5) a) Montrez que

$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)} = 1\,.$$

b) En déduire que

$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h} = -\infty\,.$$

c) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

6) Question difficile : On note g la fonction réciproque de f, définie sur $[f(b), f(a)]$. La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? (ne cherchez pas à calculer g' explicitement)