Corrigé et barème sur 40

Rédaction et présentation **(4)**, sur la base d'un qualificatif :
4 : très bon
3 : bon
2 : moyen
1 : mauvais
0 : très mauvais.

1 Exercice 1 (2,5)

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall p, q \geq N_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon\,. \qquad (\mathbf{1,5})$$

Le théorème de Cauchy montre qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers une limite finie) si et seulement si elle est de Cauchy. **(1)**

2 Exercice 2 (17)

1) a) Si $q \neq 1$, on raisonne par recurrence : la relation indiquée est vérifiée pour $n = 0$ ($V_0 = 1 = (q-1)/(q-1)$) ; ensuite si elle est vraie au rang n alors

$$V_{n+1} = V_n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,. \qquad (\mathbf{1})$$

Si $q = 1$ alors $V_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. **(0,5)**

1) b)

Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1/(1-q)$. **(1)**

Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ car $q-1 > 0$ dans ce cas. **(1)**

Si $q < -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus (pas plus d'explications requises). **(1)**

Si $q = -1$ alors V_n vaut alternativement 0 ou 1 et donc n'admet pas de limite. **(0,5)**

Si $q = 1$ alors $\lim V_n = +\infty$. **(0,5)**

2) a) On a , pour $n \geq 1$

$$V_{2n} - V_n = \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}\,. \qquad (\mathbf{1,5})$$

2) b) Plusieurs façons : soit on dit que ça contredit le critère de Cauchy, soit un argument par récurrence du genre $V_{2^k} \geq k/2$, soit en disant que s'il y a une limite l alors $l - l \geq 1/2$. **(2)**

3) a) On a $V_{n+1} - V_n = u_n \geq 0$. **(0,5)**

3) b) Pour $n = 1$ on a $V_n = 1 \leq 2 - 1/1$, la relation est vérifiée. Supposons-là vérifiée au rang n, on a

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Reste à montrer que

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$$

ce qui revient à

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

qui est évident. **(2)**

3) c) La suite (V_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers une limite finie. **(1,5)**

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} - V_n = u_{n+1}$. Si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est de Cauchy. En particulier

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq N_0 \Longrightarrow |V_{n+1} - V_n| \leq \varepsilon$$

ce qui veut dire

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq N_0 \Longrightarrow |u_{n+1}| \leq \varepsilon\,.$$

Ce qui est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. **(4)**

3 Exercice (26)

1) a) Sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f est donnée par $e^{x\log(x)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes usuels de la continuité.

Idem sur $\mathbb{R}_-^*$ où f vaut $e^{x\log(-x)}$. **(0,5)**

Reste la continuité en 0. Mais $\lim_{x\to 0} x\log(|x|) = 0$ donc la limite de f en 0 est $1 = f(0)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. **(1,5)**

1) b) On a $\lim_{x\to+\infty} x\log(|x|) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x\log(|x|) = -\infty$. Donc les limites correspondantes pour f sont $+\infty$ et 0. **(2)**

2) Par les théorèmes généraux de dérivation f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$f'(x) = (1 + \log(x))\, e^{x\log(x)}\,.$$

Par les théorèmes généraux de dérivation f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$f'(x) = (1 + \log(-x))\, e^{x\log(-x)}\,.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$f'(x) = (1 + \log(|x|)\, e^{x\log(|x|)}\,. \qquad \textbf{(3)}$$

3) a) La fonction $1 + \ln(x)$ est strictement négative pour $x \in]0, 1/e[$, nulle en $1/e$ et strictement positive pour $x > 1/e$. La fonction $1 + \ln(-x)$ est strictement négative pour $x \in]-1/e, 0[$, nulle en $-1/e$ et strictement positive pour $x < -1/e$.

Donc la dérivée de f est strictement positive sur $]-\infty, -1/e[\cup]1/e, +\infty[$, strictement négative sur $]-1/e, 0[\cup]0, 1/e[$, nulle en $-1/e$ et $1/e$. **(3)**

D'où les variations de f et le résultat : f atteint un maximum local $e^{1/e}$ au point $-1/e$ et un minimum local $e^{-1/e}$ au point $1/e$. **(2)**

3) b) On a vu que f est strictement décroissante sur $[-1/e, 1/e]$, elle est aussi continue, donc (par les théorèmes du cours) c'est une bijection sur son image : l'intervalle $[e^{-1/e}, e^{1/e}]$. **(1,5)**

4) Une primitive de $1 + \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est $x\ln(x)$, donc on trouve

$$y = \lambda\, e^{x\ln(x)}\,,$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec la contrainte $y(1) = 2$, ça donne $\lambda = 2$. **(3+1)**

5) a) Par définition de la dérivée on a

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1\,.$$

Comme $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$, on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)} = 1\,. \qquad \textbf{(2)}$$

5) b) Cette expression est celle ci-dessus multipliée par $\ln(h)$. Donc sa limite est $-\infty$. **(1)**

5) c) Si f était dérivable en 0, alors

$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln(h)}-1}{h}$$

existerait et serait égale à $f'(0)$.

Mais on a vu que cette limite est $-\infty$. **(1,5)**

6) La fonction g est dérivable en tout point de $]-1/e, 0[\cup]0, 1/e[$ d'après les théorèmes du cours. En ces points sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\,.$$

Lorsque x tend vers 1 alors $g(x)$ tend vers 0 car g est continue (théorème du cours). La limite de $f'(y)$ quand y tend vers 0 est $\pm\infty$. Donc la limite de $g'(x)$ quand x tend vers 1 existe et vaut 0. Par un théorème du cours on sait que cela implique que g est dérivable en 1, de dérivée 0 **(4)**