Dérivées : les grands théorèmes

Analyse 1

20 septembre 2013

En bref

* Les grands théorèmes
* Conséquences importantes
* Quelques preuves
* Le rôle de la continuité dans les preuves

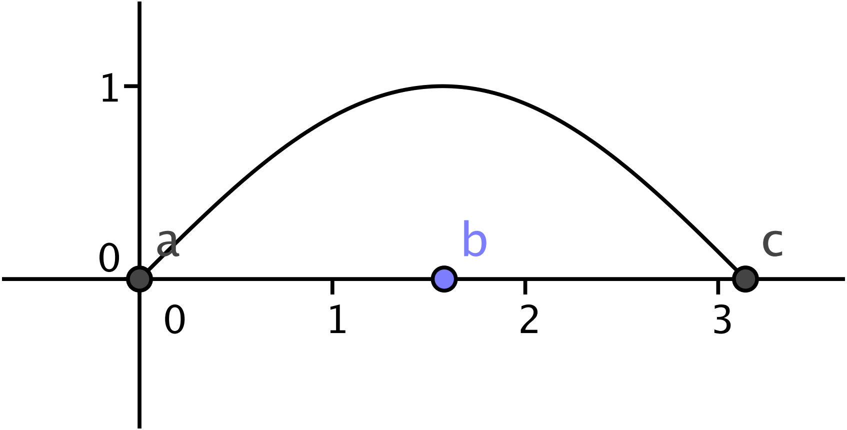
Les inserts historiques s'appuient sur wikipédia

Extrema (I)

Définition

Si $f : A \to \mathbb{R}$, alors $y \in A$ est un

* Point de maximum si $f(x) \leq f(y), \forall x \in A$
* Point de minimum si $f(x) \geq f(y), \forall x \in A$
* Point d'extremum si y est soit point de minimum, soit point de maximum



a et *c* sont des points de minimum, *b* un point de maximum. Les trois points sont des points d’extremum

Théorème de Fermat (I)

Théorème de Fermat (I)

Hypothèses

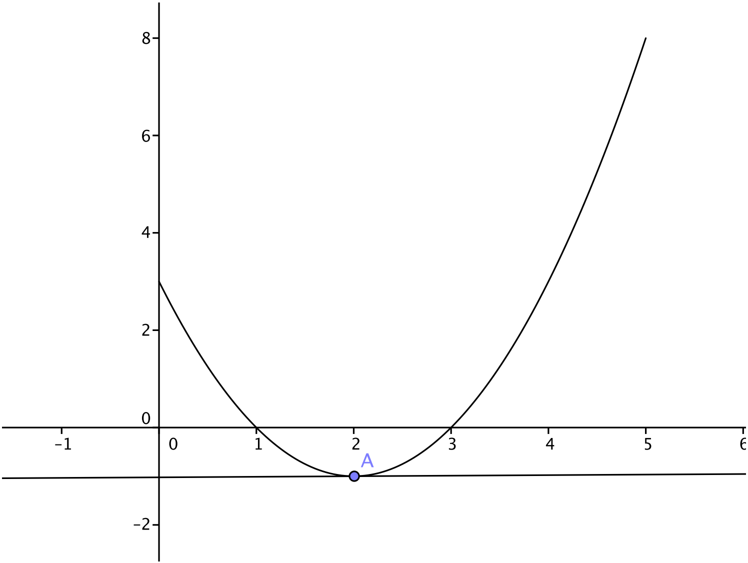
* I intervalle ouvert
* $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable
* x point d'extremum de f

Conclusion

$f'(x) = 0$

Ou encore

Sur un intervalle ouvert, la dérivée d'une fonction s'annule en un point d'extremum



Interprétation graphique : en un point d'extremum, la tangente au graphe d'une fonction est horizontale, donc son coefficient directeur $f'(x)$ vaut 0

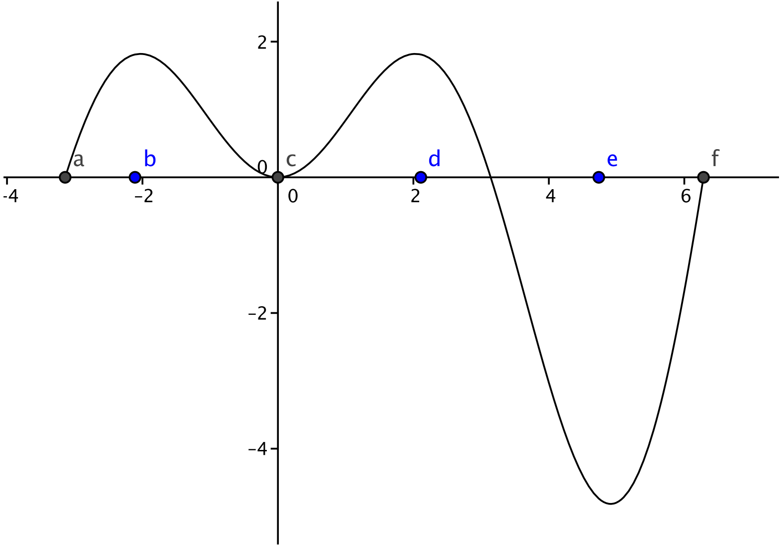
Pierre de Fermat (160?-1665). Magistrat de métier. Homme de grande culture, latiniste, helléniste. Contributions en mathématiques (petit théorème de Fermat) et en physique (principe de Fermat en optique)

Extrema (II)

Définition

Si $f : A \to \mathbb{R}$, alors $y \in A$ est un

* Point de maximum local, s'il existe un intervalle ouvert I contenant y tel que $f(x) \leq f(y), \forall\, x \in A \cap I$
* Point de minimum local si ...... $f(x) \geq f(y)$ .....
* Point d'extremum local si y est soit point de minimum local, soit point de maximum local



a et *c* sont des minima locaux. *f* est un maximum local. *b* et *d* sont des maxima globaux. *e* est un minimum global

Théorème de Fermat (II)

Théorème de Fermat (II)

Hypothèses

- $*$ I intervalle ouvert
- $*$ $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable
- $*$ x point d'extremum local de f

Conclusion

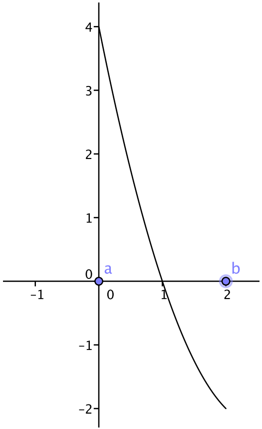
$f'(x) = 0$

Ou encore

Sur un intervalle ouvert, la dérivée d'une fonction s'annule en un point d'extremum local

Fermat (II) $\Longrightarrow$ Fermat (I)

Théorème de Fermat



Le théorème de Fermat ne dit rien sur les extrema qui se situent « au bord » de l'intervalle. Ici, a et b sont les extrema de f sur $[a, b]$, mais $f'(a) \neq 0$ et $f'(b) \neq 0$

Démonstration.

* Pour simplifier, on suppose $I = \mathbb{R}$, x point de minimum
* Alors

$$f'(x+) = \lim_{h\to 0+} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

De même

$$f'(x-) = \lim_{h\to 0-} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\leq 0} \leq 0$$

* D'où $0 \leq f'(x+) = f'(x) = f'(x-) \leq 0$, càd $f'(x) = 0$ $\square$

Fonction de Rolle

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de Rolle si

* f est continue sur $[a, b]$
* f est dérivable sur $]a, b[$

a vs b

* Il est commode de ne pas supposer $a < b$
* Ainsi $[1, 0] = [0, 1]$ et $]1, 0[=]0, 1[$
* $c \in]a, b[$ (ou « c est entre a et b ») signifie
  (1) $a < c < b$ si $a < b$
  (2) $b < c < a$ si $a > b$
  (3) $a = b = c$ si $a = b$

Exemples

* Une fonction dérivable sur $[a, b]$ est une fonction de Rolle sur $[a, b]$
* Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de Rolle et si $[x, y] \subset [a, b]$, alors (la restriction de) f est un fonction de Rolle sur $[x, y]$
* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, est une fonction de Rolle, mais n'est pas dérivable

Michel Rolle (1652-1719). Mathématicien principalement connu pour le théorème de Rolle

Théorème de Rolle

Théorème de Rolle

Hypothèses

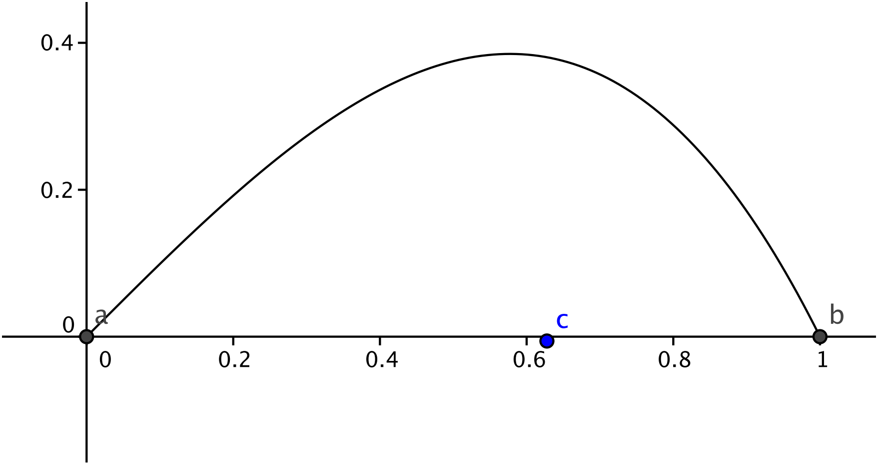
$*$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle

$*$ $f(a) = f(b)$

Conclusion

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

« Il existe » = il existe au moins un, peut-être plusieurs
« Il existe un unique » = il existe exactement un
« Est unique » = il y en a 0 ou 1



Preuve « avec les mains » du théorème de Rolle : $f(a)$ et $f(b)$ étant à la même hauteur, f doit avoir un point d'extremum c dans $]a, b[$. Le théorème de Fermat implique $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis

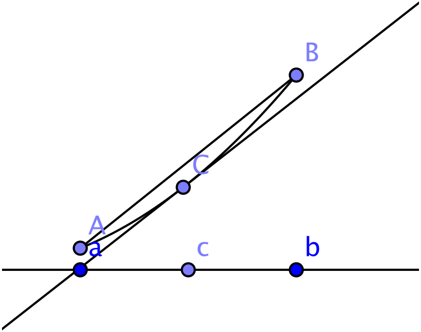
Théorème de Lagrange ; théorème des accroissements finis ; TAF

Hypothèse

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle

Conclusion

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



A est le point du graphe de f correspondant à a (càd $A(a, f(a))$). Idem pour B, C. La quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur du segment AB. $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en C. Le TAF affirme que pour un c convenable la tangente est parallèle au segment AB

Giuseppe Lodovico de Lagrangia (en français Joseph Louis, comte de Lagrange) (1736-1813). Très grand mathématicien, mécanicien et astronome. Plus ici : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange` Le bicenténnaire de sa mort est commémoré cette année

Application : IAF

Inégalité des accroissements finis ; IAF

Hypothèses

* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle
* $|f'(x)| \leq M, \forall\, x \in]a, b[$

Conclusion

$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Démonstration.

Soit c comme dans le TAF. Alors

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$\implies |f(b) - f(a)| = |f'(c)||b - a| \leq M|b - a| \qquad \square$$

Exemple

On a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Démonstration.

Soit $f : [y, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t$. Alors $|f'(t)| = |\cos t| \leq 1$, $\forall\, t \in]y, x[$. On applique l'IAF avec $a \rightsquigarrow y$, $b \rightsquigarrow x$ $\square$

Exemple

On a $e^x \leq 1 + xe^x$, $\forall\, x \geq 0$

Démonstration.

Soit $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$. Soit $c \in]0, x[$ comme dans le TAF (avec $a \rightsquigarrow 0$, $b \rightsquigarrow x$). Alors

$$e^x - 1 = xf'(t) = xe^t \leq xe^x \implies e^x \leq 1 + xe^x \qquad \square$$

Application : monotonie

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors

* f croissante $\iff$ $f' \geq 0$ (càd $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$)
* Si $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante

Variante : on peut remplacer $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable par $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle

Enoncé analogue pour les fonctions décroissantes

Démonstration.

Pour simplifier :

- On suppose $I = \mathbb{R}$
- Pour la deuxième propriété, on suppose $f'(x) > 0$ si $x \neq 0$

1. f croissante $\implies f'(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$
2. Si $f' \geq 0$, soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\exists\ c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(b-a)}_{>0} \geq 0, \text{ d'où } f \text{ croissante}$$

Démonstration - suite.

3. On suppose $f'(x) > 0, \forall\, x \neq 0$. Si $a < b \leq 0$, alors la preuve du 2. montre que $f(b) > f(a)$. De même si $0 \leq a < b$. Il reste à montrer que $f(b) > f(a)$ si $a < 0 < b$. Dans ce cas :

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f(b) - f(0)}_{>0} + \underbrace{f(0) - f(a)}_{>0} > 0 \qquad \square$$

Application : convexité

Proposition

Hypothèses

* $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable
* $f'' \geq 0$

Conclusion

f convexe

Démonstration.

* Pour $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, soit $z := tx + (1-t)y$. On doit mq $f(z) - [tf(x) + (1-t)f(y)] \leq 0$
* OPS $x \leq y$. Soient $c \in]x, z[$, $d \in]z, y[$ tq

$$f(x) = f(z) + (x - z)f'(c) \text{ et } f(y) = f(y) + (y - z)f'(d)$$

Démonstration - suite.

* On a $f'' \geq 0 \implies f' \nearrow$. Donc $f'(c) \leq f'(d)$ (car $c \leq d$)
* D'où

$$f(z) - [tf(x) + (1-t)f(y)] =$$

$$t(z-x)f'(c) - (1-t)(y-z)f'(d) =$$

$$\underbrace{t(1-t)(y-x)}_{\geq 0}\underbrace{(f'(c)-f'(d))}_{\leq 0} \leq 0 \qquad \square$$

Théorème de Cauchy

Théorème de Lagrange généralisé ; théorème de Cauchy

Hypothèses

* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonctions de Rolle
* $g'(x) \neq 0, \forall\, x \in]a, b[$

Conclusion

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Cauchy $\Longrightarrow$ Lagrange (prendre $g(x) = x$)

Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857).
Mathématicien très important et prolifique. Son œuvre couvre l’ensemble des mathématiques de son temps.
Plus ici : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy`

Exemple

Si $0 < a < b$, alors

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} \leq \frac{3}{2}\sqrt[6]{b}$$

Démonstration.

On applique le théorème de Cauchy avec $f(x) \rightsquigarrow \sqrt{x}$, $g(x) \rightsquigarrow \sqrt[3]{x}$. Avec c comme dans le théorème :

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{c} \leq \frac{3}{2}\sqrt[6]{b}$$

□

Règle de L'Hôpital

Motivation

* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$
* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{0+} = \infty$
* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0} = ?$

Limite « indéterminée » de la forme $\frac{0}{0}$

Règle de L'Hôpital

Règle de L'Hôpital ; règle de L'Hospital ; règle de Bernoulli ; cas $0/0$

Hypothèses

- $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables
- (1) Ou bien $a \in I$ et $f(a) = g(a) = 0$
  (2) Ou bien a est une extrémité de I et $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0$ si $x \neq a$
- La limite $l := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Conclusion

La limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et vaut l

Guillaume François Antoine de L’Hôpital, marquis de Sainte-Mesme, comte d’Entremont, seigneur d’Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieux (1661-1704). Mathématicien connu pour la règle qui porte son nom

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = ?$$

L'Hôpital avec $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = \sin x$,
$I =]-\pi/2, \pi/2[$, $a = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]-\pi/2, \pi/2[}} \frac{e^x}{\cos x} = 1 \implies \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]-\pi/2, \pi/2[}} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$$

$$\implies \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$$

Exemple : formule de Taylor à l'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2}$$

L'Hôpital avec $f \rightsquigarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$,
$g \rightsquigarrow (x-a)^2$, $I \rightsquigarrow \mathbb{R}$, $a \rightsquigarrow a$. On doit calculer

$$l = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)}$$

Re-L'Hôpital avec $f \rightsquigarrow f'(x) - f'(a)$, $g \rightsquigarrow 2(x-a)$. On trouve (comme f'' est dérivable, donc continue) $l = \dfrac{f''(a)}{2}$
D'où la conclusion

Théorème de Darboux

Théorème de Darboux

Hypothèses

* $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable
* $f'(x) \neq 0, \forall\, x \in I$

Conclusion

f' garde un signe constant sur I

Démonstration « avec les mains ».

- Si $a < b$, $a, b \in I$, alors $f(b) \neq f(a)$ (grâce au TAF)
- Donc f injective
- On « voit » qu'une fonction continue et injective sur I est (strictement) monotone
- Donc par exemple f croissante
- D'où $f' \geq 0$
- D'où $f' > 0$; d'où la conclusion $\square$

La démonstration « avec les mains » devient rigoureuse une fois montrés (plus tard) les résultats suivants

Proposition

Toute fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est continue

Proposition

Toute fonction continue et injective $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone

Jean Gaston Darboux (1842-1917). Analyste et géomètre

Formule de Taylor

Motivation

- $f(x) = a_0 + a_1 x \implies f(b) = f(0) + a_1 b = f(0) + f'(0)b$
- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \implies f(b) = f(0) + a_1 b + a_2 b^2 = f(0) + f'(0)b + \dfrac{f''(0)}{2} b^2$
- $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \implies f(b) = f(0) + f'(0)b + \dfrac{f''(0)}{2} b^2 + \cdots \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} b^k$

Ces formules ne restent plus vraies si f n'est pas un polynôme. Mais le théorème de Taylor(-Lagrange) donne des variantes de ces formules, vraies pour toute fonction

Formule de Taylor

Formule de Taylor ; formule de Taylor-Lagrange ; formule de Taylor avec reste de Lagrange

Hypothèse
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (l'hypothèse peut être affaiblie)
Conclusion
Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \\ & \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

Brook Taylor (1685-1731). Mathématicien connu pour les séries qui portent son nom (découvertes autour de 1715)

Exemple

Montrer l'inégalité

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6},\ \forall x \geq 0$$

- Taylor à l'ordre 4 (avec $f = \sin$, $a = 0$) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \sin c\, \frac{x^4}{24}, \text{pour un } c \in]0, x[$$

- Si $x \leq \pi$, alors $\sin c \geq 0$, et donc $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$
- Si $x > \pi$, alors $x - \dfrac{x^3}{6} < -1 < \sin x$, et donc $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$

Deux théorèmes fondamentaux (I)

Théorème des bornes ; théorème des bornes atteintes

Hypothèse
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue
Conclusion
f a un point de maximum et un point de minimum

Deux théorèmes fondamentaux (II)

Théorème des valeurs intermédiaires ; TVI

Hypothèses

* $f : I \to \mathbb{R}$ continue
* $x, y \in I$, $t \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) < t < f(y)$

Conclusion

Il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$

Corollaire

Hypothèses

* $f : I \to \mathbb{R}$ continue
* f injective

Conclusion

f strictement monotone

Deux théorèmes fondamentaux (III)

Ces théorèmes et leur corollaire s'appliquent aux fonctions de Rolle et aux fonctions dérivables

Schéma preuves grands théorèmes

Fermat $+$ théorème des bornes $\implies$ Rolle

Rolle $\implies$ Lagrange et Cauchy

Cauchy $\implies$ L'Hôpital

Lagrange $+$ corollaire au TVI $\implies$ Darboux (déjà vu)

Lagrange $\implies$ Taylor

Preuve du théorème de Rolle.

* f a un point de maximum d et un point de minimum e (grâce au théorème des bornes)
* Si $d \in]a, b[$, alors $f'(d) = 0$ (grâce au théorème de Fermat) et c'est gagné. De même si $e \in]a, b[$
* Dans le cas contraire, $f \equiv f(a)$, et donc tout point $c \in]a, b[$ convient $\square$

Preuve des théorèmes de Lagrange et Cauchy

Démonstration.

- Prouvons Cauchy (qui implique Lagrange)
- On définit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x) := & (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) \\ & - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)), \ \forall\, x \in [a, b] \end{aligned}$$

- Alors h est une fonction de Rolle et $h(a) = h(b) = 0$
- Le théorème de Rolle donne $h'(c) = 0$ pour un $c \in]a, b[$, d'où la conclusion du théorème de Cauchy $\square$

Idée de preuve de la règle de L'Hospital.

* Pour simplifier, on suppose $a \in I$
* Pour chaque $x \neq a$, le théorème de Cauchy donne un $c = c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

* c_x étant encadré par a et x, on « voit » que $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$, et

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l$$

* D'où la conclusion $\square$

Ceci deviendra une preuve rigoureuse une fois étudiées les propriétés des limites...
...en particulier le fait que si $x \to a$ et $c_x \in]a, x[$, alors $c_x \to a$ (théorème des gendarmes)

Approfondissement

* La règle de l'Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$: Théorème 1.28, p. 16, du poly
* La preuve de la formule de Taylor : Exercice 10.7, p. 84, du poly