Université Claude Bernard - Lyon 1
L1 - Analyse 1

Corrigé du contrôle du 26 septembre 2013

Question 1 — [**2 pt**] Comme $\sin(x) = 0$ si et seulement si x est un multiple entier de π, le domaine de définition de f est l'ensemble des nombres réels différents de $n\pi$ avec $n \in \mathbf{Z}$. C'est donc la réunion de tous les intervalles de la forme $]n\pi,(n+1)\pi[$ avec $n \in \mathbf{Z}$.

[**2 pt**] Soit n un entier *pair*. La fonction sin est strictement *positive* sur $]n\pi,(n+1)\pi[$. Par application de la proposition sur la dérivation des fonctions composées aux deux fonctions dérivables

$$]n\pi,(n+1)\pi[\xrightarrow{\sin} \mathbf{R}_+^* \xrightarrow{y\mapsto 1/y} \mathbf{R}\ ,$$

la fonction f est dérivable sur $]n\pi,(n+1)\pi[$ et $f'(x) = -\frac{\sin'(x)}{(\sin(x))^2} = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$. Si n est un entier *impair*, alors $\sin < 0$ sur $]n\pi,(n+1)\pi[$ et on applique la proposition aux deux fonctions dérivables :

$$]n\pi,(n+1)\pi[\xrightarrow{\sin} \mathbf{R}_-^* \xrightarrow{y\mapsto 1/y} \mathbf{R}\ .$$

Là encore, on trouve $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$. Au final, on a obtenu

$$\mathrm{D}_{f'} = \mathrm{D}_f \quad \text{et} \quad f'(x) = -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}.$$

[**1 pt**] Comme $(\sin x)^2 > 0$ sur $]\pi,2\pi[$, le signe de f' sur cet intervalle est celui de $-\cos$. La fonction f' est donc strictement positive sur $\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$ et elle s'annule au point $\frac{3\pi}{2}$.
[**2 pt**] On en déduit le tableau de variation de f :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & -1 & & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty
\end{array}$$

Le calcul des limites de f en π^+ et $2\pi^-$ ne pose pas de problème puisque sin tend vers 0 par valeurs négatives lorsque x tend vers π ou 2π dans $]\pi,2\pi[$.

Question 2 — [**2 pt**] Par définition,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

[**1 pt**] La fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,\infty[$. Comme

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0),$$

cette fonction est également continue en 0. Elle est donc continue sur $\mathbf{R}$.
[**1 pt**] La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, avec

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

[**1pt**] Comme f' a les mêmes limites à gauche et à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

la fonction f est également dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
[**1 pt**] Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Question 3 — [**2 pt**] Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x - x - 1$. L'inégalité que l'on doit démontrer est la suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \geqslant 0.$$

[**1 pt**] La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$.
[**2 pt**] La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et vaut 1 en 0, donc f' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
[**1 pt**] On en déduit le tableau de variation de f :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
f(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & f(0) & &
\end{array}$$

[**1pt**] La fonction f admet un minimum global en 0, donc $f(x) \geqslant f(0) = 0$ pour tout nombre réel x ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarques — 1. Dans la question 1, on a distingué les intervalles $]n\pi, (n+1)\pi[$ en fonction de la parité de n pour déterminer le signe de la fonction sinus et être en mesure d'appliquer la proposition du cours sur la dérivation des fonctions composées : *si I, J sont deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.*

2. Dans la question 3, le calcul de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ne pose pas de problème. Pour la limite en $+\infty$, on obtient a priori une forme indéterminée puisque $\lim_{x \to +\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. Pour surmonter cet obstacle, on utilise les croissances comparées : on met en facteur la fonction qui a la plus forte croissance, à savoir l'exponentielle :

$$f(x) = e^x - x - 1 = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$

et on utilise

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

pour voir que l'expression entre parenthèses tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.