Université Lyon 1
UE Analyse I : les réels et les fonctions

Licence STS Portail Math-Info 1ère année
Année 2013-2014

Contrôle continu n° 1

1. (**5 p.**) Enoncer la proposition sur les dérivées des fonctions composées de la forme $g \circ f$. On écrira les hypothèses sur f et g et la formule de $(g \circ f)'$.

   Réponse. **3 p.** On suppose $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables, avec I, J intervalles.
   2 p. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$, $\forall\, x \in I$. ☐

2. (**5 p.**) Utiliser la formule ci-dessus pour calculer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{\sin^2 x + 1}$.

   Réponse. **2 p.** On applique la formule avec $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f(x) = \sin^2 x + 1$, $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
   3 p. On trouve (avec l'abus de notation « usuel »)

$$\left(\sqrt{\sin^2 x + 1}\right)' = \frac{(\sin^2 x + 1)'}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + 1}} = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}.$$

☐

3. (**7 p.**) Etudier la monotonie et la convexité/concavité de la fonction $x \mapsto \ln x - x$, $x > 0$. Que représente $x = 1$ pour cette fonction ?

   Réponse. Soit $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.
   1 p. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ et **2 p.** $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   1 p. Comme $f'' < 0$, f est (strictement) concave.
   2 p. Le tableau de variation de f est

x	0		1		∞
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Justification du signe de $f'(x)$: f' est strictement décroissante (car $f'' < 0$) et $f'(x) = 0 \iff x = 1$. D'où $f'(x) > 0 = f'(1)$ si $x < 1$, resp. $f'(x) < 0$ si $x > 1$.
Justification des limites en $0+$ et ∞ : on a

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (\ln x - x) = -\infty,$$

la dernière limite s'obtenant par croisances comparées.
1 p. Le tableau de variation montre que $x = 1$ est un point de maximum (global) de f. ☐

4. (**3 p.**) Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

   Réponse. **1 p.** On a $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, d'où **1 p.** $|x|' = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. **1 p.** Comme $\lim\limits_{x \to 0+} |x|' = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0-} |x|' = -1$, $|x|$ n'est pas dérivable (d'après un critère du cours). ☐