Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info 1ère année

Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

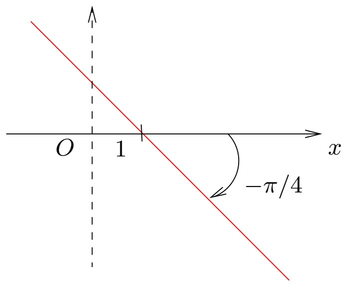
Contrôle continu n°3 – Corrigé

1. [2pt] La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$, donc son graphe admet une tangente en tout point $(x_0, f(x_0))$ et il s'agit de la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

[2pt] Si $x_0 = 1$, alors $f(x_0) = f(1) = 1$ et $f'(x_0) = f'(1) = -1$. On obtient la droite d'équation $y = 1 - x$, c'est-à-dire la parallèle à la seconde diagonale passant par le point $(1, 0)$.

[2pt] Elle forme un angle de $-\pi/4$ [1] avec l'axe des abscisses.



2. [2pt] Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors la fonction fg est également n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz).}$$

[2pt] On applique ceci aux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = e^{2x}$. Leurs dérivées successives se calculent facilement :

$$f'(x) = 1, \qquad f^{(m)} = 0 \quad \text{pour tout entier } m \geqslant 2$$

et

$$g^{(m)}(x) = 2^m e^{2x} \qquad \text{pour tout entier } m \geqslant 0.$$

Pour la fonction g, on démontre l'identité précédente en raisonnant par récurrence sur m. C'est vrai pour $m = 0$ puisque $g^{(0)}(x) = g(x) = e^{2x}$ et, si c'est vrai pour un entier $m \geqslant 0$, alors ça l'est également pour $m + 1$ puisque

$$g^{(m+1)}(x) = (g^{(m)})'(x) = (2^m e^{2x})' = 2^m(2e^{2x}) = 2^{m+1}e^{2x}.$$

[3pt] Comme la dérivée k-ième de f s'annule pour $k \geqslant 2$, seuls les termes d'indices $k = 0$ et $k = 1$ ont une contribution dans la formule de Leibniz. On a donc

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} f(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) \\ &= 2^n x e^{2x} + n 2^{n-1} e^{2x} \\ &= (2x + n) 2^{n-1} e^{2x}.\end{aligned}$$

1. L'angle entre deux droites est défini modulo π

3. **[2pt+2pt]** Les fonctions ℓ et h sont dérivables sur $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) + 3h(x) = (e^x - 3 \times 2013e^{-3x}) + 3(e^x + 2013e^{-3x}) = 4e^x$$

et

$$\ell'(x) + 3\ell(x) = (e^x - 3e^{-3x}) + 3(e^x + e^{-3x}) = 4e^x,$$

donc les fonctions h et ℓ sont des solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 4e^x$.

[3pt] Les solutions de l'équation homogène $y' + 3y = 0$ sont exactement les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-3x}$, avec $\mathrm{C} \in \mathbf{R}$. On obtient toutes les solutions de l'équation inhomogène en faisant la somme d'une solution particulière, par exemple la fonction h, et d'une solution quelconque de l'équation homogène. On obtient ainsi toutes les fonctions de la forme

$$y(x) = e^x + \mathrm{B}e^{-3x}$$

avec $\mathrm{B} \in \mathbf{R}$. En particulier, la fonction exponentielle (cas $\mathrm{B} = 0$) est une troisième solution de l'équation différentielle considérée.