Université Lyon 1
UE Analyse I : les réels et les fonctions

Licence STS Portail Math-Info 1ère année
Année 2013-2014

Contrôle continu n° 4

1. (**3 p.**) Donner la définition de la borne supérieure d'une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$.

Réponse. $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est la borne supérieure de $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ si
1 p. M est majorant de A, càd : $x \leq M$, $\forall\, x \in A$.
2 p. M est le plus petit majorant de A, càd M' majorant de $A \implies M' \geq M$. □

2. (**3 p.**) Enoncer la proposition sur le passage à la limite dans les inégalités.

Réponse. **1 p.** Soit $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ tq $x_n \geq a$, $\forall\, n$, et $x_n \to l$.
1 p. Alors $l \geq a$.
1 p. Plus généralement, si $x_n \to l$, $y_n \to L$, et si $x_n \geq y_n$, $\forall\, n$, alors $l \geq L$. □

3. (**5 p.**) Calculer $\sup \mathbb{N}$.

Réponse. Soit $M := \sup \mathbb{N}$.
1 p. On a $0 \in \mathbb{N}$, d'où $M \geq 0$, ou encore $M \in [0, \infty]$.
1 p. Nous allons montrer (par l'absurde) que $M = \infty$. Supposons par l'absurde que $M \neq \infty$. D'où $M \in [0, \infty[$. En particulier, $M \in \mathbb{R}$.
1 p. Il s'ensuit que $M - 1 < M$.
1 p. D'où $M - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $n > M - 1$.
1 p. Nous avons donc $n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > M$, ce qui contredit le fait que M est un majorant de $\mathbb{N}$. □

4. (**9 p.**)

a) (**6 p.**) On considère l'équation

(1) $\quad xy' - y = 0 \quad$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Trouver toutes les solutions de (1). [On pourra calculer y d'abord pour $x > 0$, puis pour $x < 0$.]

Réponse. **1 p.** Pour $x > 0$, l'équation devient $y' = \dfrac{1}{x} y$. La fonction ln étant une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, nous obtenons

$$y(x) = Ce^{\ln x} = Cx, \quad \forall\, x > 0,$$

avec C constante.
1 p. De même, pour $x < 0$, le fait que $\ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ donne

$$y(x) = Ke^{\ln(-x)} = -Kx, \quad \forall\, x < 0,$$

avec K constante.
1 p. Ainsi, $y(x) = \begin{cases} Cx, & \text{si } x > 0 \\ -Kx, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. L'équation (1) en $x = 0$ donne $y(0) = 0$ et donc $y(x) = \begin{cases} Cx, & \text{si } x \geq 0 \\ -Kx, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
1 p. Nous nous intéressons maintenant à la dérivabilité de y en 0. Nous avons $\lim\limits_{x \to 0+} y'(x) = C$ et $\lim\limits_{x \to 0-} y'(x) = -K$. Par ailleurs, y est clairement continue en 0. D'après un critère connu, y

est dérivable en 0 ssi $-K = C$. Ainsi, nous trouvons que les solutions de (1) sont de la forme $y(x) = Cx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
1 p. Réciproquement, toute fonction de la forme $y(x) = Cx$ est clairement solution de (1). $\square$

b) (**2 p.**) En utilisant la méthode de la solution particulière, trouver toutes les solutions de

$$(2) \qquad xy' - y = 2 \quad \text{avec } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Réponse. **1 p.** Nous remarquons que $y(x) \equiv -2$ est solution particulière de (2).
1 p. Il s'ensuit que la solution générale de (2) est donnée par la somme de la solution particulière de (2) et de la solution générale de (1), càd $y(x) = Cx - 2$, avec $x \in \mathbb{R}$ et C constante. $\square$

c) (**1 p.**) Trouver la solution de (2) satisfaisant la condition initiale $y(1) = 2$.

Réponse. On a $y(x) = Cx - 2$ et $y(1) = 2$, d'où $C - 2 = 2$, d'où $C = 4$ et donc $y(x) = 4x - 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\square$