Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

Contrôle continu n° 5

1. (**10 p.**) Enoncer et prouver le théorème des bornes atteintes.

   Réponse. (**1 p.**) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (**1 p.**) continue. (**1 p.**) Alors f a un point de maximum et un point de minimum.

   Montrons, par exemple, l'existence d'un point de maximum.

   (**1 p.**) Soit $M := \sup\{f(x)\,;\, x \in [a, b]\}$.

   (**1 p.**) Alors (propriété du sup) $\exists\,(x_n) \subset [a, b]$ tq $f(x_n) \to M$.

   (**1 p.**) Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une sous-suite (x_{n_k}) et d'un $\ell \in [a, b]$ tq $x_{n_k} \to \ell$.

   (**1 p.**) f étant continue, nous avons $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$ quand $k \to \infty$.

   (**1 p.**) Par ailleurs, nous avons $f(x_n) \to M \implies f(x_{n_k}) \to M$ (car la limite d'une sous-suite est la limite de la suite).

   (**1 p.**) Les deux points précédents et l'unicité de la limite donnent $f(\ell) = M$.

   (**1 p.**) M étant un majorant de $\{f(x)\,;\, x \in [a, b]\}$, nous obtenons

   $$f(x) \le M = f(\ell),\ \forall\, x \in [a, b],$$

   d'où ℓ est un point de maximum de f. □

2. (**6 p.**) Trouver la solution de l'équation $y' - 3y = 2\,e^{3x}$ satisfaisant la condition initiale $y(0) = -2$. [On pourra utiliser la méthode de la solution particulière et chercher une solution particulière sous la forme $y_{part}(x) = P(x)e^{3x}$, avec P polynôme du premier degré.]

   Réponse. (**1 p.**) On cherche une solution particulière $y_{part}(x) = (ax+b)\,e^{3x}$, avec a, b coefficients indéterminés.

   (**1 p.**) En substituant y_{part} dans l'équation $y' - 3y = 2\,e^{3x}$, nous obtenons

   $$a\,e^{3x} + 3(ax + b)\,e^{3x} - 3(ax + b)\,e^{3x} = 2\,e^{3x}.$$

   (**1 p.**) D'où $y_{part}(x) = 2x\,e^{3x}$ convient. (D'autres choix sont possibles.)

   (**1 p.**) La solution générale de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $y(x) = C\,e^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

   (**1 p.**) La solution générale de l'équation initiale est donc $y(x) = 2x\,e^{3x} + C\,e^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

   (**1 p.**) La condition initiale $y(0) = -2$ donne $C = -2$, et donc $y(x) = 2x\,e^{3x} - 2\,e^{3x}$. □

3. (**6 p.**) Soit $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Calculer $\inf A$ et $\sup A$.

   Réponse. (**1 p.**) ∞ est un majorant de A.

   (**1 p.**) Si $x_n := n + \dfrac{1}{2}$, alors $x_n \subset A$ et $x_n \to \infty$.

   (**1 p.**) Des deux points précédents, $\sup A = \infty$.

   (**1 p.**) $-\infty$ est un minorant de A.

   (**1 p.**) Si $x_n := -n + \dfrac{1}{2}$, alors $x_n \subset A$ et $x_n \to -\infty$.

   (**1 p.**) Des deux points précédents, $\inf A = -\infty$. □