Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info 1$^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Contrôle continu n° 6

14 novembre 2013. 2 questions. Durée 20 minutes

Question de cours. (5 p.) Enoncer et prouver le principe du majorant.

Exercice. (15 p.) Nous posons $v_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $\forall\, n \geq 0$. Nous notons e la constante d'Euler.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ pour la fonction exponentielle, montrer que $v_n < e$, $\forall\, n$. On rappelera la formule de Taylor-Lagrange et on justifiera son utilisation.
4. La suite (v_n) a-t-elle une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$? ℓ est-elle réelle ? Y a-t-il une comparaison possible entre ℓ et e ?
5. Montrer que $|v_n - e| < \dfrac{e}{(n+1)!} \leq \dfrac{e}{n+1}$, $\forall\, n$.
6. En déduire que $v_n \to e$.