Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

Contrôle continu n° 6

Question de cours. (**5 p.**) Enoncer et prouver le principe du majorant.

Réponse. (**1 p.**) Soient x_n, ℓ, y_n et $C > 0$ tels que

(1) $|x_n - \ell| \leq C y_n, \ \forall\, n.$

(**1 p.**) On suppose que $y_n \to 0$. Alors $x_n \to \ell$.
Prouvons ce résultat.

(**1 p.**) De (1), nous avons $y_n \geq 0$.

(**1 p.**) Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tq $|y_n - 0| = y_n < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

(**1 p.**) Alors $|x_n - \ell| \leq C y_n < C\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$. Nous concluons grâce au principe $C\varepsilon$. □

Argument alternatif : si $n \geq n_0$, alors nous avons

$$|x_n - \ell| \leq C y_n \leq C|y_n| < C\varepsilon.$$

Exercice. (**15 p.**) Nous posons $v_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $\forall\, n \geq 0$. Nous notons e la constante d'Euler.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ pour la fonction exponentielle, montrer que $v_n < e$, $\forall\, n$. On rappelera la formule de Taylor-Lagrange et on justifiera son utilisation.
4. La suite (v_n) a-t-elle une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$? ℓ est-elle réelle ? Y a-t-il une comparaison possible entre ℓ et e ?
5. Montrer que $|v_n - e| < \dfrac{e}{(n+1)!} \leq \dfrac{e}{n+1}$, $\forall\, n$.
6. En déduire que $v_n \to e$.

Réponse. (**1 p.**) Nous avons $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2,5$.

(**2 p.**) Nous avons

$$v_{n+1} - v_n = \left(\cancel{\frac{1}{0!}} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{0!}} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n!}}\right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

et donc (v_n) est (strictement) croissante.

(**2 p.**) Rappelons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre k : si f est k fois dérivable sur I, et si $a, b \in I$, alors il existe $c \in]a, b[$ tq

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(c).$$

(**1 p.**) Nous appliquons cette formule avec $f(x) = e^x$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$, $k = n+1$. La formule s'applique, car la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable.

(**1 p.**) Nous obtenons l'existence d'un $c = c(n) \in]0, 1[$ tq

(2) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^c = v_n + \frac{1}{(n+1)!} e^c > v_n.$$

(**1 p.**) De ce qui précède, nous avons $v_n < e$.

(**1 p.**) La suite $(v_n) \subset \mathbb{R}$ est croissante. Elle a donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(**1 p.**) Par ailleurs, la suite est majorée par $e \in \mathbb{R}$, et donc $\ell \in \mathbb{R}$.

(**1 p.**) Comme $v_n < e$, $\forall\, n$, nous obtenons $\ell \leq e$.

(**1,5 p.**) De (2), nous obtenons (en utilisant le fait que $c < 1 \implies e^c < e$)

$$|v_n - e| = \left|\frac{1}{(n+1)!}e^c\right| = \frac{1}{(n+1)!}e^c < \frac{e}{(n+1)!}.$$

(**1 p.**) De ce qui précède, en utilisant l'inégalité (évidente ?)

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

nous obtenons

$$(3) \qquad |v_n - e| < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{e}{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(**1,5 p.**) L'inégalité (3) et le principe du majorant, appliqué avec : $x_n = v_n$, $\ell = e$, $C = e$ et $y_n := \dfrac{1}{n+1}$, donnent $v_n \to e$. □

Bonus : 1 p. pour la preuve détaillée de l'inégalité $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{n+1}$.