Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Contrôle continu n° 7

29 novembre 2013. Durée 25 minutes

Question de cours. (**8 p.**) Montrer que, si $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ sont telles que $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $y_n \to L \in \mathbb{R}$, alors $x_n\, y_n \to \ell\, L$. On donnera les détails de la preuve et on précisera les résultats et principes utilisés dans la démonstration.

Exercice. (**12 p.**) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $M = \max\,\{f(x)\,;\ \ a \leq x \leq b\}$. On veut démontrer l'égalité :

$$M = \sup\,\{f(x)\,;\ a < x < b\}.$$

a) Rappeler pourquoi f a un point de maximum, et donc pourquoi il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$.

b) Établir l'inégalité :

$$\sup\,\{f(x)\,;\ a < x < b\} \leq M.$$

c) Soit c comme dans la question a). Finir la démonstration en distinguant les trois cas de figure possibles : $c \in]a, b[$, $c = a$ ou $c = b$. Lorsque c est l'une des bornes de $[a, b]$, on pourra considérer une suite de points de $]a, b[$ convergeant vers c. Au passage, il faudra montrer l'existence d'une telle suite.