Université Lyon 1
UE Analyse I : les réels et les fonctions

Licence STS Portail Math-Info 1ère année
Année 2013-2014

Contrôle continu n° 7

Question de cours. (**8 p.**) Montrer que, si $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ sont telles que $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $y_n \to L \in \mathbb{R}$, alors $x_n\, y_n \to \ell\, L$. On donnera les détails de la preuve et on précisera les résultats et principes utilisés dans la démonstration.

Réponse. (**1 p.**) Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe n_1, n_2 tels que

(1) $|x_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_1$

et

(2) $|y_n - L| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_2.$

(**1 p.**) Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.

(**1 p.**) Alors (1), (2) et la définition de n_0 donnent

(3) $|x_n - \ell| < \varepsilon$ et $|y_n - L| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0.$

(**1 p.**) La suite (x_n) étant convergeante, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que

(4) $|x_n| \leq M,\ \forall\, n.$

En particulier, (4) est vraie $\forall\, n \geq n_0$.

(**3 p.**) Si $n \geq n_0$, alors (3) et (4) donnent

$$\begin{aligned}|x_n\, y_n - \ell\, L| &= |(x_n\, y_n - x_n\, L) + (x_n\, L - \ell\, L)| \leq \text{(par l'inégalité triangulaire)}\\ &\leq |x_n\, y_n - x_n\, L| + |x_n\, L - \ell\, L|\\ &= |x_n|\,|y_n - L| + |x_n - \ell|\,|L| < M\,\varepsilon + |L|\,\varepsilon = (M + |L|)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

(**1 p.**) Nous concluons grâce au principe $C\,\varepsilon$. □

Exercice. (**12 p.**) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $M = \max\,\{f(x)\,;\ \ a \leq x \leq b\}$. Si $a < b$, on veut démontrer l'égalité :

$$\sup\,\{f(x)\,;\, a < x < b\} = M.$$

1. Rappeler pourquoi f a un point de maximum, et donc pourquoi il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$.
2. Etablir l'inégalité :

$$\sup\,\{f(x)\,;\, a < x < b\} \leq M.$$

3. Soit c comme dans la question a). Finir la démonstration en distinguant les trois cas de figure possibles : $c \in]a, b[$, $c = a$ ou $c = b$. Lorsque c est l'une des bornes de $[a, b]$, on pourra considérer une suite de points de $]a, b[$ convergeant vers c. Au passage, il faudra montrer l'existence d'une telle suite.

Réponse. (**1 p.**) f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

(**1 p.**) Le théorème des bornes atteintes donne l'existence du maximum de f sur $[a, b]$, c'est-à-dire d'un point c et d'un nombre M tels que

(5) $f(x) \leq M = f(c),\ \forall\, x \in [a, b].$

Comme $a < b$,

(6) l'ensemble $A := \{f(x)\,;\, x \in]a, b[\}$ est non vide.

(**1 p.**) De (5), nous avons

(7) $\quad f(x) \leq M, \ \forall\, x \in]a, b[.$

(**1 p.**) De (6) et (7), M est un majorant de l'ensemble non vide A, et donc

(8) $\quad \sup A \leq M.$

(**1 p.**) Supposons $c \in]a, b[$. Alors $f(c) \in A$, et donc

(9) $\quad \sup A \geq f(c) = M.$

(**1 p.**) En combinant (8) et (9), nous obtenons $M = \sup A$, qui est la conclusion désirée.

(**2 p.**) Supposons maintenant $c = a$ (par exemple). Soit $x_n := a + \dfrac{b-a}{n}$, avec $n \geq 2$. Alors

(10) $\quad a < x_n = a + \dfrac{b-a}{n} \leq a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2} < b, \ \forall\, n \geq 2.$

Nous avons trouvé une suite $(x_n)_{n\geq 2} \subset]a, b[$ telle que $x_n \to c$.

(**1 p.**) Nous avons $f(x_n) \in A$, $\forall\, n \geq 2$, d'où

(11) $\quad f(x_n) \leq \sup A.$

(**1 p.**) En utilisant la continuité de f, le fait que $x_n \to a$, le passage à la limite dans les inégalités, le fait que $c = a$, et (11), nous obtenons

(12) $\quad M = f(c) = f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \sup A.$

(**1 p.**) La conclusion $\sup A = M$ suit de (8) et (12).

(**1 p.**) Le cas où $c = b$ est traité de manière analogue. $\square$