Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

Contrôle continu n° 8

5 décembre 2013. Durée 25 minutes

Question de cours. (**2 p.**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *décroissante*. Si $a \in \mathbb{R}$, donner les formules de

$$\lim_{x\to a-} f(x) \text{ et } \lim_{x\to a+} f(x).$$

Exercice. (**18 p.**) Rappelons le fait suivant : si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x>a}} f(x), \tag{1}$$

au sens où l'existence de l'une des limites entraîne l'existence de l'autre limite, et leur égalité.

1. Calculer la limite
$$\ell := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \tag{2}$$
en utilisant la règle de L'Hospital (et le rappel (1)). On justifiera l'utilisation de cette règle. On précisera l'endroit où (1) intervient.
2. Montrer la double inégalité
$$\ln x \le \ln(1+x) \le 1 + \ln x, \ \forall\, x \ge 1. \tag{3}$$
3. En utilisant la question précédente et le rappel (1), retrouver la limite de (2). On précisera l'endroit où (1) intervient.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n}$. On justifiera la réponse.