Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 8

Question de cours. (**2 p.**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *décroissante*. Si $a \in \mathbb{R}$, donner les formules de

$$\lim_{x\to a-} f(x) \text{ et } \lim_{x\to a+} f(x).$$

Réponse. Nous avons

$$(\mathbf{1\ p.})\quad \lim_{x\to a+} f(x) = \sup\{f(y)\,;\, y > a\}$$

et

$$(\mathbf{1\ p.})\quad \lim_{x\to a-} f(x) = \inf\{f(y)\,;\, y < a\}.$$

□

Exercice. (**18 p.**) Rappelons le fait suivant : si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x>a}} f(x), \tag{1}$$

au sens où l'existence de l'une des limites entraîne l'existence de l'autre limite, et leur égalité.

1. Calculer la limite

$$\ell := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \tag{2}$$

en utilisant la règle de L'Hospital (et le rappel (1)). On justifiera l'utilisation de cette règle. On précisera l'endroit où (1) intervient.

2. Montrer la double inégalité

$$\ln x \le \ln(1+x) \le 1 + \ln x,\ \forall\, x \ge 1. \tag{3}$$

3. En utilisant la question précédente et le rappel (1), retrouver la limite de (2). On précisera l'endroit où (1) intervient.

4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n}$. On justifiera la réponse.

Réponse. 1. (**1 p.**) Soient $f, g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+e^x)$, $g(x) := x$, $\forall\, x > 0$.

(**1 p.**) Les fonctions f et g sont dérivables, et nous avons $g(x) \ne 0$ et $g'(x) \ne 0$, $\forall\, x > 0$.

(**1 p.**) Par ailleurs, nous avons $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

(Et aussi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, mais cette condition n'est pas nécessaire pour pouvoir appliquer la règle de L'Hospital ∞/∞. Voir notes de cours
`http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/analyse_1_notes_cours.pdf`
section sur la règle de l'Hospital ∞/∞, pp. 49–50, remarque finale p. 50. **Bonus 2 p.** pour la preuve correcte de $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.)

(**3 p.**) Nous avons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{1+y} = 1. \tag{4}$$

Au passage, nous avons utilisé le fait que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(**1 p.**) La règle de l'Hospital et (4) donnent

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} \frac{\ln(1+e^x)}{x}. \tag{5}$$

(**1 p.**) En combinant (5) et le rappel (1), nous obtenons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1.$$

2. (**1 p.**) La fonction ln étant strictement croissante sur $]0, \infty[$, nous avons, pour $x > 0$, $\ln x < \ln(1+x)$. Donc en particulier la première inégalité de (3) est vraie si $x \geq 1$.

(**2 p.**) Si $x > 0$, alors nous avons (en utilisant à nouveau la croissance stricte du ln) :

$$\ln(1+x) \leq 1+\ln x \iff \ln(1+x) \leq \ln(e\,x) \iff 1+x \leq e\,x \iff (e-1)\,x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{e-1}.$$

Ainsi, la deuxième inégalité de (3) est vraie si $x \geq \dfrac{1}{e-1}$, donc en particulier si $x \geq 1$.

(**2 p.**) Si $x > 0$, alors $e^x > 1$. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité (3) avec e^x à la place de x, et nous obtenons

$$\underbrace{\ln(e^x)}_{x} \leq \ln(1+e^x) \leq 1 + \underbrace{\ln(e^x)}_{x},\ \forall\, x > 0. \tag{6}$$

(**1 p.**) En divisant (6) par x nous obtenons l'encadrement

$$1 \leq \frac{\ln(1+e^x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x},\ \forall\, x > 0. \tag{7}$$

(**1 p.**) Nous avons

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} 1 = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1. \tag{8}$$

(**1 p.**) De (7), (8) et le théorème des gendarmes, nous obtenons à nouveau

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x>0}} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1.$$

Nous concluons comme avant.

3. (**1 p.**) Le fait que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$ se traduit en termes de suites comme suit : si $(x_n) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ est telle que $x_n \to \infty$, alors $\dfrac{\ln(1+e^{x_n})}{x_n} \to 1$.

(**1 p.**) Nous obtenons la conclusion du point 3 en prenant, dans ce qui précède, $x_n = n, \forall\, n \geq 1$. $\square$