Université Lyon 1
UE Analyse I : les réels et les fonctions

Licence STS Portail Math-Info 1ère année
Année 2013-2014

Contrôle continu n° 9

Exercice.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Mais on ne suppose pas $g'(0) > 0$.

2.a. Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, \infty[$. On justifiera ce fait en utilisant le théorème des accroissements finis.

2.b. En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin x$.

3.a. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3.b. En déduire que f est strictement croissante.

Réponse

1. (**1 p.**) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Notre but est de montrer que $g(x) < g(y)$.

(**1 p.**) Il y a trois cas à examiner :
(i) $x \leq 0$ et $y \leq 0$. (ii) $x \geq 0$ et $y \geq 0$. (iii) $x < 0$ et $y > 0$.

(**1 p.**) Dans le premier cas, nous avons $g(x) < g(y)$, car g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Le deuxième cas est traité de manière analogue.

(**2 p.**) Enfin, dans le troisième cas, nous avons

$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \implies g(x) < g(0) \\ \text{(car } g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 0]) \\ 0 < y \implies g(0) < g(y) \\ \text{(car } g \text{ est strictement croissante sur } [0, \infty[) \end{array}\right\} \implies g(x) < g(0) < g(y) \implies g(x) < g(y).$$

2.a. (**1 p.**) Montrons par exemple que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$; l'autre cas est similaire.

(**1 p.**) Soient $x, y \in]-\infty, 0]$ tels que $x < y$. Notre but est de montrer que $g(x) < g(y)$.

(**1 p.**) La fonction g étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier une fonction de Rolle sur $[x, y]$.

(**1 p.**) Le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un $c \in]x, y[$ tel que

$$(1) \qquad g(y) - g(x) = \underbrace{(y - x)}_{>0} g'(c).$$

(**1 p.**) Comme $c < y$ et $y \leq 0$, nous avons $c < 0$, d'où $g'(c) > 0$.

(**1 p.**) Du point précédent et de (1), nous avons $g(y) - g(x) > 0$, d'où $g(x) < g(y)$, comme désiré.

2.b. (**1 p.**) Des points 1 et 2.a., g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.a. (**1 p.**) Nous avons $f'(x) = 3x^2 + 1 - \cos x$.

(**3 p.**) En utilisant le fait que $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, et que $\cos x \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos x}_{\geq 0} \geq 0.$$

(**3 p.**) Nous avons donc $f'(x)$ est positive, comme somme de nombres positifs. Rappelons que si une somme de nombres positifs est nulle, alors chaque terme de la somme est nul. Donc, pour avoir $f'(x) = 0$, il faut avoir à la fois $3x^2 = 0$ et $1 - \cos x = 0$, ce qui n'est possible que si $x = 0$. Ainsi, si $x \neq 0$ alors $f'(x) > 0$.

3.b. (**1 p.**) Des questions 2.b. (appliquée avec g remplacé par f) et 3.a., f est strictement croissante.