Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Contrôle continu final

Le 8 janvier 2014. Durée 2 heures. 4 exercices

Documents et appareils électroniques interdits

A titre indicatif, le poids des exercices dans la note finale est :
Exercice 1 : 40 %.
Exercice 2 : 20 %.
Exercice 3 : 20 %.
Exercice 4 : 20 %.
Les questions suivies par un * sont plus difficiles.

Exercice 1. Soit

$$f : \mathbb{R} \to A,\ \text{donnée par} : \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}\ , & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x}\ , & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ici, A est l'image de f (que l'on déterminera au cours de l'exercice).

1. Montrer que f est dérivable.
2. Montrer que la dérivée f' de f est continue.
3. Montrer que f' n'est pas dérivable.
4. Déterminer le tableau de variation de f.
5. * Tracer le graphe de f. Au passage, étudier l'existence des asymptotes au graphe, et la position du graphe par rapport aux asymptotes.
6. Déterminer l'image A de la fonction f.
7. Montrer que $f : \mathbb{R} \to A$ admet une fonction réciproque, que l'on note $h : A \to \mathbb{R}$.
8. Trouver h.
9. * Notons g la restriction de f à $]0, \infty[$. Trouver la formule de $g^{(n)}$ (la dérivée n^{e} de g) pour $n \geq 1$. On justifiera la réponse.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad y'(x) = -\frac{y(x)}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \text{avec } x > 0.$$

1. Montrer que

$$(2) \qquad y_0 :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ \text{donnée par} : \forall\, x > 0,\ y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

   est solution de (1).
2. Trouver toutes les solutions de (1).

3. Donner la solution de (1) vérifiant $y(1) = \sqrt{2} - 1$.
4. * Montrer que la fonction y de la question précédente se prolonge par continuité à droite en 0.

Exercice 3.

1. Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un point $c = c(x) \in]0, x[$ tel que

(3) $\quad e^x - 1 = x\, e^c.$

Le but de cet exercice est de préciser la position du point c par rapport au milieu $x/2$ de l'intervalle $]0, x[$.

Pour ce faire, nous introduisons la fonction

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \text{ donnée par : } \forall\, x \geq 0,\ f(x) = e^{x/2} - e^{-x/2} - x.$$

2. Calculer la dérivée f' de f. Dresser le tableau de variation de f'. Quel est le signe de f' sur $]0, \infty[$? (Dans cette question, il s'agit du tableau de variation de f', pas de celui de f.)
3. Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f.
4. En déduire l'inégalité
$$f(x) > 0,\ \forall\, x > 0.$$
5. En déduire que
$$e^x - 1 > x\, e^{x/2},\ \forall\, x > 0.$$
6. Enfin, obtenir que $c(x) \in]x/2, x[, \forall\, x > 0$.

Exercice 4.

Partie I. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}, \forall\, n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, soit

(4) $\quad z_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, u_j.$

On pose aussi

(5) $\quad x_n = z_{2n}$ et $y_n = z_{2n-1},\ \forall\, n \geq 1.$

1. Donner les valeurs de z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, y_1 et y_2.
2. Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge.

Partie II. Dans cette partie, nous considérons une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante et qui converge vers 0. (Attention : il ne s'agit pas forcément de la suite donnée par $u_n = \dfrac{1}{n}, \forall\, n \geq 1$.)
Nous définissons les suites $(z_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ par les formules (4)-(5).

4. * Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Conclusion ?