Feuille 1. Dérivées

Calcul de dérivées

Exercice 1. Pour les expressions suivantes de la forme $f(x)$, déterminer le domaine naturel de définition D_f, le domaine de dérivabilité $D_{f'}$, et la formule de la dérivée.

1. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$. 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$. 3. $f(x) = \sqrt{\sin x}$. 4. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$. 5. $f(x) = (\tan x)^3$.

6. $f(x) = (\ln x)^2$. 7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3}$. 8. $f(x) = e^{\tan x}$. 9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 1}$.

10. $f(x) = \ln(x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. 11. $f(x) = |\sin x|$. 12. $f(x) = E(x)$ (la partie entière).

13. $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$. 14. $f(x) = \ln(\operatorname{sh} 2x)$. 15. $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$, avec $a > 0$ constante.

16. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$. 17. $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. 18. $f(x) = \tan(x^2)$.

Exercice 2.

a) Soit $a > 0$ une constante. Déterminer le domaine naturel de définition D_h et le signe de l'expression $h(x) = x + \sqrt{x^2 - a^2}$.

b) Répondre aux questions de l'Exercice 1 pour l'expression $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$.

c) Même question pour $g(x) = \ln\left(x + a + \sqrt{x^2+2ax}\right)$. (On pourra se ramener à la question précédente en utilisant des fonctions composées.)

Exercice 3. Mêmes questions que dans l'Exercice 1 pour les expressions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. 2. $f(x) = x|x|$. 3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \le 0 \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

4. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } x < 0 \\ \tan(2x), & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Ecrire l'équation de la tangente au graphe en $x = -2$ et $x = 3$.

b) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente est : (1) horizontale ; (2) verticale.

Exercice 5. Soit $f(x) = x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'angle entre la tangente en x et Ox pour : $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$.

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 6. Calculer $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. 2. $f(x) = \ln|x|$. 3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. 4. $f(x) = \sin x$.

Exercice 7. Etudier la monotonie et la convexité des fonctions données par les expressions suivantes

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$. 2. $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$. 3. $f(x) = x^2 - \sin x$.

Pour la dernière question, on pourra s'appuyer en partie sur un raisonnement graphique. Quel est le résultat dont on a besoin pour prouver rigoureusement les conclusions obtenues ?

Exercice 8. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, l'inégalité

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 9. Soit $f(x) = e^{-x} \cos x$. Exprimer $f^{(4)}$ en fonction de f.

Exercice 10. En utilisant la règle de Leibniz, trouver $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, si

1. $f(x) = xe^x$. 2. $f(x) = x^2 e^{-2x}$. 3. $f(x) = (1-x^2)\cos x$. 4. $f(x) = x^3 \ln x$. 5. $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$.

Etudes de fonctions

Exercice 11. Tracer les graphes des fonctions associées aux expressions suivantes. On étudiera la monotonie, la convexité, les courbes asymptotes.

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. 2. $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$. 3. $f(x) = x^2 + \dfrac{4}{x-1}$. 4. $f(x) = x + \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$.

Exercice 12. Discuter, en fonction de la constante $a \in \mathbb{R}$, le nombre de racines réelles de l'équation $x^3 - 3x + a = 0$.

Inégalités

Exercice 13. Etablir les inégalités suivantes.

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, xy \leq \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$. 2. $\forall\, x, y > 0$, $\forall\, p \in]1, \infty[$, $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{(p-1)y^{p/(p-1)}}{p}$.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. 4. $\forall\, x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. 5. $\forall\, x \geq 0$, $-x \leq \sin x \leq x$.

Dérivées de quelques fonctions usuelles

Exercice 14.

a) On admet la limite fondamentale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$. Se servir de ce résultat pour calculer $\sin'$, $\cos'$, $\tan'$ et cotan'.

b) Calculer la dérivée de $x \mapsto e^x$ (resp. $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$ constante) à partir de la limite fondamentale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (admise).

c) On admet la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée de cette fonction.

d) Calculer les dérivées de $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Solutions d'équations différentielles

Exercice 15. Montrer que :

a) $x \mapsto xe^{-x}$ est solution de $xy' = (1-x)y$.

b) $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ vérifie $xy' = (1-x^2)y$.

c) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+\ln x}$, $x>0$, satisfait $xy' = y(y\ln x - 1)$.

Exercices théoriques

Exercice 16.

a) Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire).

b) Montrer que la dérivée d'une fonction périodique est périodique.

Exercice 17.

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $m \le f'(x) \le M$ si $x \in [a,b]$.

   i) Etudier la monotonie des fonctions $x \mapsto f(x) - mx$ et $x \mapsto f(x) - Mx$.

   ii) En déduire un encadrement de $f(b) - f(a)$.

b) Application : trouver un encadrement de $\ln b - \ln a$, avec $0 < a < b$.

c) Cette fois-ci on suppose $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et $l \le f''(x) \le L$ si $x \in [a,b]$. En étudiant les fonctions $x \mapsto f(x) - f'(a)(x-a) - \dfrac{l(x-a)^2}{2}$ et $x \mapsto f(x) - f'(a)(x-a) - \dfrac{L(x-a)^2}{2}$, obtenir un (autre) encadrement de $f(b) - f(a)$.

Exercice 18. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, deux fois dérivable, et telle que $f'(x) = 0$ pour un $x \in I$. Que représente x pour f ?

Exercice 19. On admet le fait qu'une fonction dérivable est continue. Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables, retrouver la formule de $(fg)'$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que le graphe de f se trouve au-dessus de chacune de ses tangentes.

Phénomènes physiques, chimiques ou géométriques et dérivées

Exercice 21. La loi du mouvement rectiligne d'une particule est $s = 2t^2 + 3t + 5$, où t est le temps en secondes et s est l'abscisse (en centimètres). Quelle est la vitesse moyenne de la particule entre $t = 1$ et $t = 5$?

Exercice 22. Pour la courbe $x \mapsto 2^x$, trouver le taux d'élévation entre $x = 1$ et $x = 5$ et le taux instantané d'élévation en $x = 1$. Au passage, proposer des définition pour ces taux.

Exercice 23. Un objet chaud est placé dans une cuve de refroidissement. Proposer la définition du taux de refroidissement, resp. du taux instantané de refroidissement.

Exercice 24. Dans un récipient cylindrique, l'eau s'écoule par un petit orifice situé en bas du récipient, sous le seul effet de la gravité.

a) Rappeler la loi de Torricelli donnant la vitesse de l'écoulement au niveau de l'orifice, en fonction de l'instant t et de la hauteur $h(t)$ du liquide. Pour se rafraîchir la mémoire, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Torricelli

b) Exprimer de deux façons différentes la quantité de liquide qui s'écoule entre l'instant initial et le temps t. On fera intervenir l'aire A de l'orifice et le débit instantané.

c) En déduire une équation différentielle satisfaite par h.

Exercice 25. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si $f(x) = g(x)$ pour un x, proposer une définition pour l'angle α entre les deux graphes au point $(x, f(x))$. Calculer $\tan\alpha$ en fonction de $f'(x)$ et $g'(x)$.
Applications.

a) Trouver l'angle d'intersection des paraboles $y = (x-2)^2$ et $y = -4 + 6x - x^2$.

b) Trouver les points d'intersection des courbes $y = 4x^2 + 2x - 8$ et $y = x^3 - x + 10$. Montrer que, en l'un de ces points, les deux courbes sont tangentes.

Exercice 26. Une voiture (italienne et très chère) met, en départ arrêté, deux secondes pour arriver à 100 km/h. Quelle est la distance parcourue après la première seconde ? Quelle est l'hypothèse faite pour répondre à la question précédente ?

Exercice 27. Deux particules évoluent sur la même droite selon les lois $x(t) = 100 + 5t$ et $y(t) = t^2/2$. Quelle particule dépasse l'autre au moment de leur rencontre ? A quelle vitesse relative ?

Exercice 28. Le rayon d'une sphère croît à une vitesse de 5 cm/s. Lorsque le rayon atteint 50 cm, quelle est la vitesse de croissance de l'aire, resp. du volume de la sphère ?

Exercice 29. En négligeant la résistance de l'air, on obtient que la loi du mouvement d'un point matériel lancé à la vitesse v_0 à un angle α par rapport à l'horizontale est $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$. Trouver : la trajectoire, la vitesse, et la distance parcourue.

Exercice 30. Une barre non homogène AB a 12 cm de longueur. Si $M \in AB$, alors la masse de AM croît comme le carré de la distance AM et vaut 10 g quand $AM = 2$ cm. Trouver la masse de la barre et sa densité en tout point.

Exercice 31. Un point matériel $M(t)$ tourne sur le cercle unité à la vitesse angulaire constante ω. Sa position initiale est $M(0) = 1$. Soit $M_1(t)$ la projection de $M(t)$ sur Ox. Trouver :

a) La vitesse instantanée, resp. maximale et minimale de $M_1(t)$.

b) La vitesse et l'accélération de $M_1(t)$ au moment du passage par l'origine.

Exercice 32. On considère une espèce dont la population à l'instant t est $N(t)$.

a) Dans le modèle de Malthus, le taux d'accroissement de la population est proportionnel à la population. Le facteur de proportionnalité est la différence k entre le taux de natalité et celui de mortalité. Donner l'équation satisfaite par $N(t)$.

b) Le modèle de Verhulst (connu aussi comme « modèle logistique ») prédit que le taux k n'est pas constant, mais est en réalité proportionnel à la différence entre la population maximale N^* que supporte la planète et la population à l'instant t.

   1. Ecrire l'équation satisfaite par N.
   2. Poser $y = \dfrac{1}{N}$ et calculer N' en fonction de y et y'.
   3. Ecrire l'équation satisfaite par y.

c) Y a-t-il un problème avec ces modèles ?