Université Lyon 1 — Licence STS Portail Math-Info 1ère année

UE Analyse I : les réels et les fonctions — Année 2013-2014

# Feuille 2. Classiques du calcul différentiel

## Raisonnements par récurrence

**Exercice 1.**

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ dans $I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

   Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$.

2. Soient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, les coefficients binominaux. (Par convention, $0! := 1$.) Rappelons les formules $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, avec $1 \leq k \leq n-1$, et $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} \equiv 1$. Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables, montrer la *formule de Leibniz*

$$(f\, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

## Règle de L'Hospital

**Exercice 2.** Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hospital.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$. 2. $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotan} x}$. 3. $\lim_{x\to 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$. 4. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x \operatorname{cotan}(2x)}$.

5. $\lim_{x\to 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$. 6. $\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{a}{x}$. 7. $\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$. 9. $\lim_{x\to -\infty} x^n e^x$. 10. $\lim_{x\to\infty} x^{-n} \ln x$. 11. $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Pour les limites de la dernière ligne, on raisonnera par récurrence sur $n$.

**Exercice 3.** Nous admettons provisoirement le résultat suivant, qui sera démontré plus tard : si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont telles que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, alors

$$\lim_{x\to a} (1 + f(x))^{g(x)} = \text{« } e^{\lim_{x\to a} f(x)g(x)} \text{ »} = \begin{cases} e^l, & \text{si } l \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } l = -\infty \\ \infty, & \text{si } l = \infty \end{cases}.$$

En utilisant (entre autres) ce résultat, calculer

1. $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$. 2. $\lim_{x\to 0} (1 + x - \sin x)^{x^{-3}}$.

**Exercice 4.** Cette fois-ci, calculer les limites 1-3 à partir du résultat suivant : si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont telles que $f(x) > 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, alors

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \text{« } e^{\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)} \text{ »} = \begin{cases} e^l, & \text{si } l \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } l = -\infty \\ \infty, & \text{si } l = \infty \end{cases}.$$

1. $\lim_{x\to 0+} x^x$. 2. $\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$. 3. $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$.

**Valeurs approchées, encadrement**

**Exercice 5.** Montrer que $|\sin(a+h) - [\sin a + h\cos a]| \leq \dfrac{h^2}{2}$.

**Exercice 6.** Estimer l'erreur faite dans l'approximation $e \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$.

**Exercice 7.** Nous nous proposons de calculer des valeurs (très) approchées de $\sin 1$ et $\cos 1$.

1. Trouver une majoration de $\left|\cos 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{6!}\right)\right|$ et de $\left|\sin 1 - \left(1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}\right)\right|$.
2. Conclusion ?

**Exercice 8.** Nous nous proposons de montrer l'encadrement

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Soit $f : [0,\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x(1+x/2)}{x+1} - \ln(1+x)$. Etudier la monotonie de $f$ et en déduire que $f(x) > 0$, $\forall\, x > 0$.
2. En utilisant la question précédente, montrer que la fonction
$$g : ]0,\infty[ \to \mathbb{R},\ g(x) := \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x),$$
est strictement croissante.
3. De la question précédente, déduire la monotonie de la fonction
$$h : ]0,\infty[ \to \mathbb{R},\ h(x) := (1+x)^{1/x+1/2}.$$
4. Calculer $\lim_{x\to 0+} h(x)$. En utilisant la question précédente, obtenir l'inégalité
$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$
5. Reprendre les questions précédentes, mais cette fois-ci avec les fonctions
$$f(x) := \frac{x}{x+1} - \ln(1+x),\ x > 0,\ g(x) := \frac{1}{x}\ln(1+x),\ x > 0,\ h(x) := (1+x)^{1/x},\ x > 0,$$
pour obtenir l'inégalité
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

**Exercice 9.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Nous supposons que $|f(x)| \leq M_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, et $|f''(x)| \leq M_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons d'obtenir une majoration pour $|f'|$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que
$$f(x+h) \leq f(x) + f'(x)\,h + \frac{M_2}{2}h^2,\ \forall\, h \in \mathbb{R}.$$
2. En déduire que
$$\frac{M_2}{2}h^2 + f'(x)\,h \geq -2M_0,\ \forall\, h \in \mathbb{R},\ \text{c'est-à-dire que}\ \frac{M_2}{2}h^2 + f'(x)\,h + 2M_0 \geq 0,\ \forall\, h \in \mathbb{R}.$$
3. De la question précédente, obtenir que $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

**Méthodes de quadrature**

**Exercice 10.** *Préambule.* On se donne une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. D'après le théorème de Leibniz-Newton, il existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$. $F$ est une *primitive* de $f$. Si $f \geq 0$, alors $F(b) - F(a)$ s'interprète comme l'aire comprise entre $Ox$, le graphe de $f$, et les droites verticales $x = a$ et $x = b$, ce qui s'écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

En général, on ne peut pas calculer $F$ à partir de $f$, et se pose le problème du calcul approché de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Dans les questions qui suivent, nous décrivons plusieurs formules de calcul approché de l'intégrale, et étudions l'erreur faite en approximant. L'idée de base est de diviser $[a,b]$ en $n$ intervalles de même longueur :

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n], \text{ avec } x_j := a + j\frac{b-a}{n}, \; j \in [\![0,n]\!],$$

et d'approcher $\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ par $(x_j - x_{j-1})f(y_j)$, avec $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$ (c'est l'aire du rectangle de base $[x_{j-1}, x_j]$ et de hauteur $f(y_j)$ ; faire un dessin !). En sommant cette approximation sur $j$, on obtient l'approximation

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(y_j).$$

Les diverses méthodes étudiées se distinguent par le choix du point $y_j$.

1. *Méthode des rectangles.* En prenant $y_j = x_j$, on obtient la méthode des rectangles à droite, qui propose l'approximation

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n^d(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

Avec $y_j = x_{j-1}$, on obtient l'approximation par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n^g(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right).$$

Donnons une estimation de l'erreur commise. Plus précisément, si $f$ est dérivable et $|f'| \leq M$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R_n^g(f)\right| \leq M\,\frac{(b-a)^2}{2n}\text{ ; inégalité similaire pour } R_n^d. \tag{1}$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$, et appliquer à $F$ la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale, au sens où l'inégalité (1) devient égalité pour certaines fonctions non constantes (que l'on explicitera).

2. *Méthode du point milieu.* En prenant $y_j := a + (j - 1/2)\frac{b-a}{n}$, on obtient l'approximation

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$

Si $f$ est deux fois dérivable et $|f''| \leq L$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq L\frac{(b-a)^3}{24n^2}. \tag{2}$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$, et appliquer à $f$ la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2 entre $x$ et $(a+b)/2$.] Montrer que cette estimation de l'erreur est optimale, au sens où l'inégalité (2) devient égalité pour les fonctions polynômiales du second degré.

3. *Méthode des trapèzes.* On pose

$$C_n(f) := \frac{R_n^g(f) + R_n^d(f)}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Si $f$ est deux fois dérivable et $|f''| \leq L$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - C_n(f)\right| \leq L\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

[Indication : commencer par le cas $n = 1$. On pose $h := f - g$, où $g$ est la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$. Montrer que $h$ vérifie $|h(t)| \leq L\,(t-a)(b-t)/2$.]

4. Approfondissement : *Méthode de Simpson.* On pose

$$S_n(f) := \frac{C_n(f) + 2T_n(f)}{3} = \frac{b-a}{6n}\sum_{j=1}^{n-1}\left(f(x_j) + f(x_{j-1}) + 4f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)\right).$$

Si $f$ est de classe $C^4$ et $|f^{(4)}| \leq P$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right| \leq P\frac{(b-a)^5}{32\times 90\,n^4}.$$

[Indication ; commencer par le cas $n = 1$, et appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $h/2$ à la fonction $t \mapsto F(c+t) - F(c-t) - t(F'(c+t) + F'(c-t) + 4F'(c))/3$, où $c = (a+b)/2$ et $F$ est une primitive de $f$. Pour la formule de Taylor avec reste intégral, voir ici : http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Taylor#Formule_de_Taylor_avec_reste_de_Laplace_.28ou_reste_int.C3.A9gral.29]

**Applications de la convexité**

Rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),\ \forall\, x, y \in I,\ \forall\, t \in [0,1].$$

**Exercice 11.** Montrer que $x \mapsto |x|$ est convexe.

**Exercice 12.** Montrer que $f(x) = 3|x-2| + 2(x+5)^4$ est convexe sur $D_f = \mathbb{R}$.
[Indications. Montrer d'abord que la somme de deux fonctions convexes (resp. concaves) est convexe (resp. concave). Puis montrer que si une fonction $g$ est convexe (resp. concave), alors $h$ définie par $h(x) = ag(x-b)$ est convexe (resp. concave) quelque soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$. Question supplémentaire : que se passe-t-il si $a < 0$ ?]

**Exercice 13.** Soient $x_1, \ldots, x_n$ in $I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Montrer l'*inégalité de Jensen* :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Cas particulier :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n},\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in I.$$

**Exercice 14.** Rappelons le résultat suivant, vu en cours : si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et $f'' \geq 0$, alors $f$ est convexe. Nous nous proposons d'établir la réciproque suivante de ce résultat : si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et deux fois dérivable, alors $f'' \geq 0$.

1. Soient $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \in I$ tels que $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Montrer que

$$f(x_2) + f(x_3) \leq f(x_1) + f(x_4).$$

[Indication : en utilisant la convexité de $f$, majorer $f(x_2)$ et $f(x_3)$ en fonction de $f(x_1)$ et $f(x_4)$.]
Conclusion équivalente : si $0 < \varepsilon < x_4 - x_1$, alors

$$f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1) \leq f(x_4) - f(x_4 - \varepsilon).$$

2. Déduire de la question précédente que $f'$ est croissante.
3. Conclure.

Dans les deux exercices suivants nous nous proposons d'établir, en utilisant les fonctions convexes, quelques inégalités célèbres.

**Exercice 15.** En utilisant l'inégalité de Jensen, obtenir les inégalités suivantes (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) :

$$\exp\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1} + \cdots e^{x_n}\right), \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n > 0,$$

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n > 0.$$

La deuxième inégalité est l'inégalité entre la *moyenne géométrique*

$$G(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

et la *moyenne arithmétique*

$$A(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

La troisième inégalité est l'inégalité entre la moyenne géométrique et la *moyenne harmonique*

$$H(a_1, \ldots, a_n) := \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

**Exercice 16.** Si $1 < p < \infty$, on pose $q := \dfrac{p}{p-1}$ ($q$ est l'*exposant conjugué* de $p$). Nous nous proposons d'établir l'*inégalité de Hölder*

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \left(|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p\right)^{1/p} \left(|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q\right)^{1/q}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}.$$

1. Que devient l'inégalité de Hölder si $p = 2$ ? Dans ce cas, porte-t-elle un autre nom ?
2. Supposons l'inégalité à montrer vraie sous l'hypothèse supplémentaire $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \geq 0$. Montrer que l'inégalité est vraie sans cette hypothèse supplémentaire.

   Nous pouvons donc supposer, par la suite, $a_j \geq 0$ et $b_j \geq 0$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$. Posons

   $$\alpha := \left(a_1^p + \cdots + a_n^p\right)^{1/p}, \ \beta := \left(b_1^q + \cdots + b_n^q\right)^{1/q}.$$

3. Rappelons l'inégalité de Young (feuille 1) : si $1 < p < \infty$, et si on pose $q := \dfrac{p}{p-1}$, alors

   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\, a, b \geq 0.$$

   En déduire que :

   $$ab \leq \frac{A^p a^p}{p} + \frac{b^q}{qA^q}, \quad \forall\, a, b \geq 0, \ \forall\, A > 0.$$

4. En déduire l'inégalité

   $$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \frac{A^p}{p}\alpha^p + \frac{1}{qA^q}\beta^q, \quad \forall\, A > 0.$$

5. Soit $f(A) := \dfrac{A^p}{p}\alpha^p + \dfrac{1}{qA^q}\beta^q$, $A > 0$. Déterminer le minimum de $f$.
6. Conclure.